TS. Nguyễn Văn Lợi (Chủ biên)
Ngô Thị Nhã – Nguyễn Minh Đức

Làm quen với Toán
Tổ hợp – Nguyên lý – Graph

(Dành cho học sinh THCS)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Lời nói đầu

Chúng ta cùng nhau làm quen với Toán Tổ hợp – Nguyên lý – Graph. Các kiến thức này được xây dựng và lần lượt trình bày với hình thức giản dị nhất có thể. Hy vọng ngành khoa học này sẽ trở thành gần gũi với mọi người trong thời đại mà ngay cả toán học cũng đang đứng trước các thách thức cần đổi mới.

Mục đích của chúng tôi là xây dựng một tài liệu dễ học cho các bạn học sinh và một tài liệu thuận lợi làm giáo trình cho các thầy cô, những người cùng tâm nguyện đưa lý thuyết toán rời rạc về cấp học phổ thông. Nhiệm vụ này cũng là thách thức của các nền khoa học đang phát triển ở các nước khác. Vì vậy, trên cơ sở học hỏi kinh nghiệm của các bạn nước ngoài và thử nghiệm chuyên môn thông qua các giờ giảng dạy thực tế đã giúp chúng tôi lựa chọn cách đi sư phạm thích hợp trong tài liệu này. Đó là chọn cách tiếp xúc nhẹ nhàng, tự nhiên, lấy học sinh làm trung tâm. Cầm cuốn sách trên tay bạn đọc thấy vui vì nhiều thắc mắc đã có một hướng nhìn thích hợp.

Quyển sách gồm 6 chương.

Chương 1. Có thể được xem như phần lý thuyết của toán tổ hợp.
Với các bài giảng chủ yếu là thông qua các ví dụ để mọi người làm quen với các khái niệm, học một số thuật toán tự nhiên, cơ bản. Chương này được xây dựng thành những bài giảng nhỏ, bắt đầu bằng các ví dụ dẫn dắt và sau đó là chùm hoa gồm 10 bài tập thực hành kèm lời giải.

Chương 2. Chúng ta tiếp thu làm quen với hai nguyên lý: Nguyên lý Dirichlet và nguyên lý bất biến. Đây là những chân lý đã được hoàn thiện tới mức tinh thể. Những phát hiện và tổng kết này có tầm ứng dụng rộng rãi không ngờ.

Cả hai chương (1 và 2) thông qua hơn 40 ví dụ và 100 bài tập nhẹ nhàng theo sát nội dung lý thuyết, chúng tôi hy vọng sẽ giúp cho người đọc cùng tham dự một cuộc du lịch chuyên môn. Lượng kiến thức khai vị dễ chịu đủ để người đọc tò mò và đủ lượng để tạo hứng thú học toán và phấn khởi cùng chúng tôi tiếp bước.

Chương 3. Cấu trúc chương này hoàn toàn được xây dựng tiếp nối hai chương trên với mức độ bài tập sâu hơn và rộng hơn nhằm rèn luyện các kiến thức vừa được lĩnh hội và thực tập. Bên cạnh đó các bài toán có đối tác cũng được trình bày thông qua các bài toán về trò chơi. Vì thế phần này rất thuận tiện để phục vụ nhu cầu hiểu sâu, sử dụng như bài tập về nhà hoặc bổ sung trực tiếp để minh họa cho bài giảng. Chương này là lẵng hoa gồm 100 bài tập được phân chia theo nội dung kiến thức thành 10 chùm hoa.

Việc phân chia rạch ròi theo tiểu mục là kết quả đúc kết từ thực tế giảng dạy. Nó giúp cho công việc lên kế hoạch tự học hay xây dựng giáo trình giảng dạy khoa học và thuận tiện hơn.

Chương 4. Sau khi đã có một lượng kiến thức cần thiết, giáo trình của chúng ta được hình thành theo hướng chuyên đề. Thông qua các chuyên đề này chúng ta tiếp tục làm quen với môi trường xuất hiện bài toán và phương pháp giải. Phần này cũng là các nhóm 10 bài tập chuyên với nội dung và nhiệm vụ khai phá.

Chương 5. Vẫn giữ hướng chuyên đề, nhưng cấu trúc được tự do có xu thế luyện thi hơn và gần gũi với thực tế chuyên sâu hơn. Phần này cũng là tuyển tập các bài toán hay và khó hơn. Chương này cung cấp cho bạn đọc các phương pháp giải toán theo chiều hướng thuật toán nhiều hơn. Đó là trước một vấn đề người ta chứng minh có thể giải được hay không (về mặt toán) và có thuật toán để nhận được lời giải cụ thể không?

Chương 6. Chúng tôi mạnh dạn đặt tên cho phần đầu của chương là toán có đối tác vì có lý do riêng. Chúng tôi muốn cùng với các bạn trẻ nhận thức được rằng làm toán hiện nay đã khác. Toán phải đi vào thực tế ứng dụng. Phần toán đối tác được tiếp tục với các bài toán trò chơi, các bài toán trên bàn cờ với nhiều lời giải đã thành chuẩn mực. Chúng tôi hy vọng sẻ chia cho các bạn trẻ cách tiếp cận và sử dụng toán học linh động hơn trong cuộc sống.

Phần tiếp theo là phần thú vị nhất, đó là lý thuyết Graph. Chúng ta đã có thuật ngữ toán của nó là Lý thuyết đồ thị. Nhưng cho đến nay từ "đồ thị" không phù hợp với nội dung mà ngành khoa học này truyền tải, nên chúng tôi dùng thuật ngữ quốc tế chung là *Lý thuyết Graph*.

Lý thuyết Graph là lý thuyết đỉnh cao của toán công nghệ. Toán công nghệ không có tham vọng được xây dựng trên hệ thống tiên đề, thay vào đó người ta tìm những mô hình "mang nhiều đặc trưng hữu hạn" và giải quyết ngay các vấn đề phát sinh từ thực tế.

Với những khái niệm làm quen vừa phải có chùm các bài toán đi kèm, chúng tôi hy vọng sẽ giúp cho các bạn cùng chúng tôi tiếp nhận và sớm thân thiện với ngành Toán nhằm tạo tiền đề cho ngành Khoa học máy tính này.

Tài liệu này về mặt định lượng là hơn 600 ví dụ và bài tập được tổng hợp và phân bổ kỹ lưỡng theo mức độ từ dễ đến khó. Nguồn chủ yếu từ Internet và forum **Bài toán hay, Lời giải đẹp ...** Việc tìm nguồn của mỗi bài toán quả là vô cùng vất vả và với chúng tôi là không thể thực hiện. Nếu có bạn nào phát hiện nguồn hoặc là bài do cá nhân sáng tác xin báo cho chúng tôi. Việc phổ cập nguồn chuẩn xác sẽ được thực hiện trong điều kiện có thể.

Qua đây chúng tôi cũng chân thành cảm ơn các bạn và các thành viên trong forum Bài toán hay, Lời giải đẹp đã cùng nhau mang tình yêu toán học đến với mọi người qua những cuộc tham luận tự nhiên và bổ ích.

Mặc dù các tác giả đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, song cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp, phản hồi của độc giả để cuốn sách hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

Chương 1

Tổ hợp

– Tổ hợp là gì?
Câu hỏi phát sinh tự nhiên khi ta bắt đầu quan tâm đến đề tài.
Tổ hợp là tên của ngành toán học nghiên cứu về *các phương pháp đếm* và ứng dụng. Toán tổ hợp là ngành toán không xây dựng trên hệ tiên đề mà sử dụng các nguyên lý liên quan đến tính hữu hạn.

1. Các nguyên lý đếm cơ bản

Lý thuyết tổ hợp được xây dựng trên hai nguyên lý đếm cơ bản, rất tự nhiên. Đó là: Nguyên lý nhân và Nguyên lý cộng.
Nguyên lý nhân: Giả sử một sự việc có thể được chia thành bước đầu tiên và bước thứ hai, mỗi bước có thể thực hiện riêng biệt và có kết quả riêng, nối tiếp nhau để kết thúc sự việc. Giả sử

1) có m cách thực hiện bước một, và sau đó

2) có n cách thực hiện bước hai,

thì số kết quả có thể có của cả quá trình sẽ là $m \times n$ cách thực hiện.

Nguyên lý cộng: được sử dụng khi ta có thể thực hiện công việc đếm của chúng ta bằng hai phần độc lập, kết quả của đếm từng phần không bị ảnh hưởng khi làm phần này trước hay phần kia trước. Ví dụ một phần gồm có m cách thực hiện, phần kia gồm n cách, thì kết quả thực hiện toàn bộ công việc sẽ là $m + n$ cách.

Quy tắc trừ có thể coi là quy tắc bổ sung cho Nguyên lý cộng. Quy tắc này xuất hiện khi có sự đếm trùng lặp hoặc đếm thừa cần điều chỉnh. Những trường hợp như vậy hay xảy ra, khi phân phối các công việc để thực hiện thì tồn tại phần giao, tạo nên sự đếm trùng lặp đòi hỏi sự điều chỉnh.

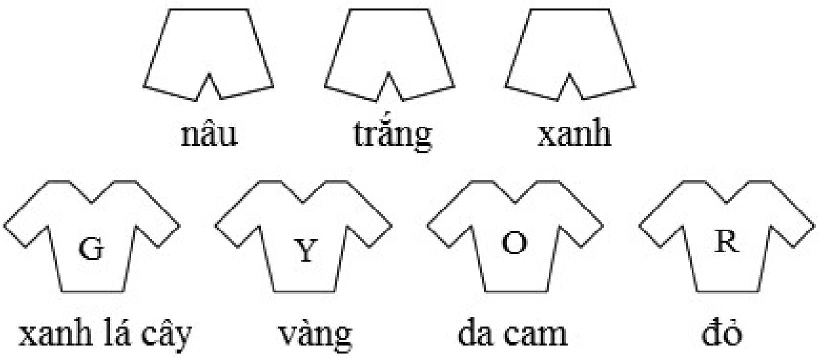
Ngoài ra, ta có thể kể đến *quy tắc bù* khi biết tổng thể và số lượng cần loại bỏ, thì lấy số lượng toàn bộ trừ đi số lượng không phù hợp theo yêu cầu, như vậy ta cũng thu về kết quả đếm chính xác.

Cả hai quy tắc trừ hay quy tắc bù thực chất là các dạng thể hiện khác nhau của nguyên lý cộng.

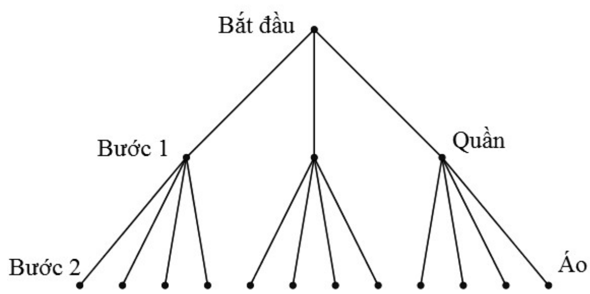
1.1. Nguyên lý nhân

Ví dụ 1. *Hôm nay Bình đi tập thể thao. Mẹ để sẵn* 3 *cái quần short và* 4 *cái áo phông để Bình chọn bộ nào bạn ấy thích. Hỏi Bình có bao nhiêu khả năng chọn đồ đi tập?*

Lời giải. Quần short của Bình có màu nâu, trắng và xanh. Áo phông có màu xanh lá cây, vàng, da cam và đỏ. Có bao nhiêu sự kết hợp có thể của quần short và áo phông?



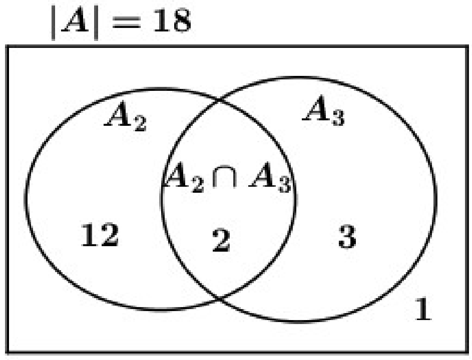
Trước tiên với quần short Bình có ba cách chọn. Sau đó đến áo phông lại có 4 cách chọn tiếp theo. Sau hai bước chọn ta có đồ thị sau:



a) và chia hết cho 3? c) hoặc chia hết cho 3?
b) và không chia hết cho 3? d) hoặc không chia hết cho 3?

HD: *Gọi A là tập 18 số ghi trên bảng. A_2 là các số chẵn trên bảng, A_3 là các số chia hết cho 3 và A_6 là các số chia hết cho 6. Vậy $A_6 = A_2 \cap A_3$. Do đó* $|A_2| = 14,\ |A_3| = 5,\ |A_6| = 2$.

a) Số các số lẻ chia hết cho 3 là: $5 - 2 = 3$.
b) Số các số lẻ không chia hết cho 3 là: $18 - 14 - 3 = 1$.
c) Số các số là số lẻ hoặc chia hết cho 3 là: $1 + 3 + 2 = 6$.
d) Số các số là số lẻ hoặc không chia hết cho 3 là: $1 + 3 + 12 = 16$.



4. Các bài toán đếm cơ bản

Các bài toán tổ hợp vừa khó lại vừa dễ. Khó vì sự xuất hiện muôn màu muôn vẻ không biết phải bắt đầu thế nào? Dễ vì khi có phương pháp giải thì lời giải thật sự trong sáng và tạo cảm hứng ứng dụng.

4.1. Hoán vị

Các phần tử khác nhau của một tập hợp được xếp thành một hàng có bao nhiêu cách? Ta nghiên cứu một số trường hợp cụ thể.

Ví dụ 19.

a) Có 3 hình tròn được sơn màu đỏ, vàng, xanh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chúng thành một hàng?

b) Ba bạn Anh, Bình, Minh đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên ba chiếc ghế cạnh nhau?

c) Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể xếp được bao nhiêu số có ba chữ số, mỗi chữ số trong một số chỉ sử dụng một lần?

d) Có 3 mảnh giấy, mỗi mảnh được ghi một chữ khác nhau từ ba chữ cái A, B, C. Có bao nhiêu cách ghép chúng thành một từ có ba chữ cái khác nhau?

e) Có ba người chạy thi. Hỏi có bao nhiêu khả năng về đích (không cùng nhau)?

f) Có bao nhiêu số có 5 chữ số bắt đầu bằng 12 và được cấu tạo từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$, mỗi chữ số trong một số chỉ được sử dụng một lần?

Nhận xét. Các bài toán này rất phong phú về hình thức, nhưng về nội dung thì là một. Ta có thể phát biểu chúng như sau:
Một tập có ba phần tử. Có bao nhiêu cách xếp chúng thành hàng?

Lời giải. Có 6 cách.
Cách 1. Ta sẽ giải bài này cho cụ thể câu hỏi (c) và (d). Phương pháp liệt kê trực tiếp:

1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1

Cách 2. Hoặc với các chữ A, B, C bằng cách chèn hàng. Coi như đã có trật tự của hai chữ A và B, ta chèn chữ thứ 3 là chữ C vào giữa chúng.

A B $\boxed{\text{C}}$	A $\boxed{\text{C}}$ B	$\boxed{\text{C}}$ A B
B A $\boxed{\text{C}}$	B $\boxed{\text{C}}$ A	$\boxed{\text{C}}$ B A

Có ba vị trí có thể chèn C vào hàng cuối, giữa và đầu hàng.
Rõ ràng có 6 cách xếp.

Ví dụ 20.

a) Có 4 hình tròn được sơn màu đỏ, vàng, xanh, đen. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chúng thành một hàng?

b) Bốn bạn Anh, Bình, Minh, Nam đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên bốn chiếc ghế cạnh nhau?

c) Từ các chữ số $1, 2, 3, 4$ có thể xếp được bao nhiêu số có bốn chữ số, mỗi chữ số trong một số chỉ sử dụng một lần?

d) Có 4 mảnh giấy, mỗi mảnh được ghi một chữ khác nhau từ bốn chữ cái A, B, C, D. Có bao nhiêu cách ghép chúng thành một từ có bốn chữ cái khác nhau?

e) Có bốn người chạy thi. Hỏi có bao nhiêu khả năng về đích không có sự trùng nhau?

f) Có bao nhiêu số có 6 *chữ số bắt đầu bằng* 65 *và được cấu tạo từ các chữ số* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*, mỗi chữ số trong một số chỉ được sử dụng một lần?*

Lời giải. Có 24 cách.
Cũng giống như bài trước, nhóm bài này là hoán vị của tập bốn phần tử. Ở đây chúng ta làm quen với cách giải sắp xếp từng phần tử.
Cho 4 chiếc ghế A, B, C, D xếp thành hàng. Ta tính cách xếp lần lượt 4 số lên từng cái ghế.
Ghế A có 4 khả năng.
Ghế B có 3 khả năng vì ghế A đã có 1 số.
Ghế C có 2 khả năng vì A và B đã chiếm 2 số.
Ghế D còn lại duy nhất một số nên còn 1 cách.
Toàn bộ có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ cách.

Ghi chú. Câu (f) tương đương với các câu trên vì 65 bị dán chặt vào đầu các số cần tạo ra, do đó sự có mặt chỉ là hình thức mà không gây biến đổi về số lượng các số được tạo ra như trường hợp có 4 phần tử.
Trong cách chứng minh 2 bài trên ta vừa đưa ra 3 cách tiếp cận, về nội dung có chút khác nhau. (1) giữ nguyên số ban đầu; (2) chèn số $-$ công phá từ bên trong; (3) bắt đầu từ đầu. Mỗi bài cụ thể các bạn cần chọn công cụ thích hợp nhất cho mình.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng có* $n!$ *cách để xếp* n *người vào một dãy sao cho hai cách sắp xếp khác nhau bất kì có ít nhất một vị trí mà ở đó hai người ở hai cách là khác nhau?*

Lời giải. Cách chứng minh tương tự như trong ví dụ trên. Có n chiếc ghế xếp thành hàng. Chiếc thứ nhất có n khả năng, chiếc thứ 2 có $n-1$ khả năng, số ghế đã xếp tăng lên bao nhiêu thì số người có thể lựa chọn giảm đi bấy nhiêu (tổng đó không đổi). Vậy theo nguyên lý nhân có $n \times (n-1) \times .... \times 2 \times 1 = n!$ khả năng sắp xếp.

4.2. Chỉnh hợp

Từ n phần tử của một tập hợp, chọn ra k phần tử và sắp xếp thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách?

Ví dụ 21. *Từ các chữ số* $1, 2, 3, 4, 5$ *có thể tạo được bao nhiêu số có* 3 *chữ số sao cho trong mỗi số các chữ số đôi một khác nhau.*

Lời giải. Sử dụng cách xếp ghế của bài toán trên. Ta có 3 ghế. Ghế thứ nhất có 5 cách lựa chọn, ghế thứ hai còn 4 cách và ghế thứ ba còn 3 cách. Theo nguyên lý nhân, số các số có ba chữ số có thể tạo thành thỏa mãn điều kiện đầu bài sẽ là $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

Bài toán 2. *Từ tập có* n *phần tử có bao nhiêu cách chọn ra* k *phần tử* $(0 < k \leq n)$ *và xếp chúng thành một hàng?*

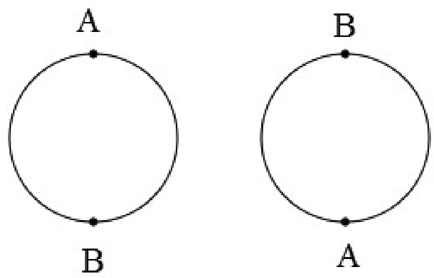
Lời giải. Có $n \times (n-1) \times .... \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ cách. Lời giải hoàn toàn tương tự như cách làm trong ví dụ trên.

4.3. Sắp xếp trên đường tròn

Ở trên chúng ta vừa nghiên cứu cách sắp xếp thành hàng có vị trí bắt đầu và vị trí kết thúc. Điều gì sẽ xảy ra khi ta xếp các phần tử xung quanh một chiếc bàn tròn, hay nói cách khác, khi ta hoán vị các vị trí của các phần tử trên một đường tròn.

Bài toán 3. *Có* n *người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ lên cái đu quay hình tròn có* n *chỗ ngồi? Hai cách xếp không gọi là khác nhau nếu chọn một người* A *bất kì thì người bên trái* A *và người bên phải* A *không thay đổi. Giải với* $n = 2, 3, 4, 5, 10$.

Ta khảo sát các trường hợp khi ngồi thành vòng tròn, thì những trật tự nào không thể coi là khác nhau.
Với $n = 2$. Có 2 trường hợp.



c) Vì luôn chia hết cho 3 *nên điều kiện số tận cùng là* 0 *cũng đủ để chia hết cho* 30. *Vậy có* $4! = 24$ *số chia hết cho* 30.
Tất nhiên còn nhiều cách giải khác.

4.5. Tổ hợp

Có bao nhiêu cách chọn k phần tử khác nhau từ một tập hợp có n phần tử? Đây là một trong những câu hỏi thường trực tôi hay đối thoại với các bạn học sinh lần đầu gặp mặt.

Ví dụ 22. *Năm người bạn, họ gặp nhau, mỗi người bắt tay tất cả các bạn của mình, mỗi người một lần. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?*

Lời giải. Cách 1. (Đây có lẽ là cách giải dễ hiểu nhất với các bạn lần đầu làm quen với toán đếm – có thể vì nội dung liệt kê thực tế). Khi gặp nhau, 5 người A, B, C, D, E lần lượt bắt tay nhau. Đầu tiên A bắt tay B, C, D, E (4 cái bắt tay). Sau đó B vì đã bắt tay A nên chỉ cần phải bắt tay C, D, E (3 cái). Tiếp đó C bắt tay với D và E (2 cái), cuối cùng D bắt tay E (1 cái). Vậy tổng số các cái bắt tay là $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (cái).

Cách 2. Có 5 người. Mỗi người bắt tay 4 người khác, nhưng hai người làm chung một cái bắt tay nên số cái bắt tay được tính 2 lần. Vậy tổng số các cái bắt tay sẽ là $5 \times 4 : 2 = 10$.

Bài toán này có rất nhiều cách phát biểu khác nhau.

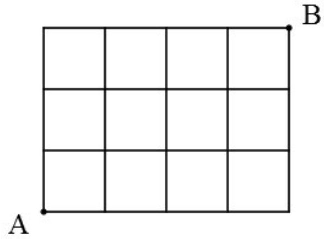
– Có 5 người tham gia một giải cờ. Mỗi đội chỉ đấu với nhau một ván. Hỏi có bao nhiêu ván cờ?

– Trên mặt phẳng có 5 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối bất kỳ hai điểm ta được một đoạn thẳng. Có bao nhiêu đoạn thẳng được vẽ?

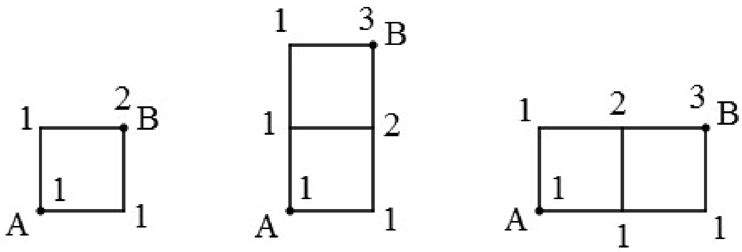
– Trên mặt phẳng có 5 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi ta có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh là các điểm đã cho?

Câu hỏi cuối cùng tương đương với các câu hỏi khác được liệt kê, vì việc lấy 3 điểm tạo một tam giác, đồng nghĩa với giữ 3 điểm và loại ra 2 điểm (cũng như 2 bắt tay và 3 người còn lại vỗ vai chẳng hạn), sự tương đương còn có yếu tố vô tình vì số $5 = 2 + 3$.

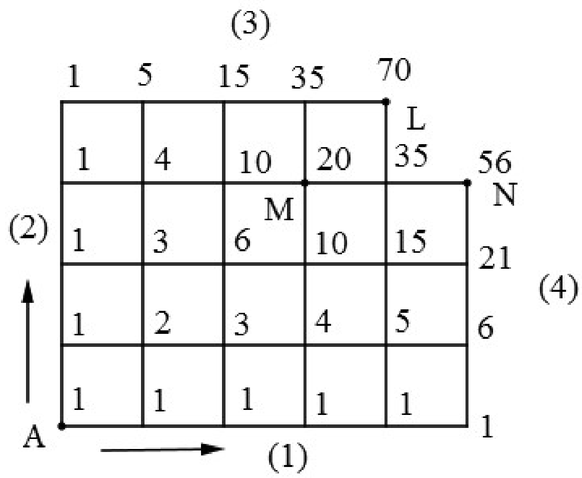
Ví dụ 23. *Trong hình vẽ dưới đây, có bao nhiêu cách đi từ A đến B mà chỉ được đi lên hay sang phải?*



Lời giải. Ta nghiên cứu bài toán này trong các trường hợp cụ thể của hình chữ nhật kích thước $m \times n$.



Ta nhận thấy rằng ngoại trừ các điểm nút trên chu vi hình chữ nhật, thì các điểm khác đều có hai lối dẫn tới và hai lối dẫn ra, vì thế tổng cộng số đường dẫn đến nó bằng tổng số đường từ 2 nút trên mạng tới.
Trên lối đi thẳng đứng ngoài cùng bên trái (2) và trên đường nằm ngang dưới cùng (1) chỉ có một cách vào, vậy tất cả các điểm đo giá trị bằng 1. Từ các điểm loại này có hai lối ra. Trên lối đi thẳng đứng ngoài cùng bên phải (4) và trên đường nằm ngang trên cùng (3) có 2 lối vào. Và từ các điểm loại này chỉ có 1 lối ra.



Lời giải thực nghiệm này còn có tên là phương pháp truy hồi. Để có kết quả cuối cùng ta tính toàn bộ kết quả trung gian tại các điểm dẫn đến đích cuối cùng. Ví dụ đi từ A đến M có 20 cách, từ A đến N có 56 cách, từ A đến L có 70 cách.

Trong ví dụ của chúng ta $m = 4,\ n = 3$. Vậy có 35 cách đi.

Phương pháp đếm trực tiếp trên cho kết quả nhiều hơn cần thiết, nhưng đòi hỏi nhiều công sức. Để tập trung vào đích cần đến, ta cần có những công cụ nhanh gọn hơn. Ví dụ sau phục vụ cho chúng ta điều này.

Ví dụ 24. *Các bài toán sau có cùng bản chất và kết quả.*

a) Cho lưới ô vuông kích thước 3×5 $(m \times n)$. *Có bao nhiêu cách đi từ góc dưới bên trái đến góc trên bên phải mà chỉ được đi lên hay sang phải?*

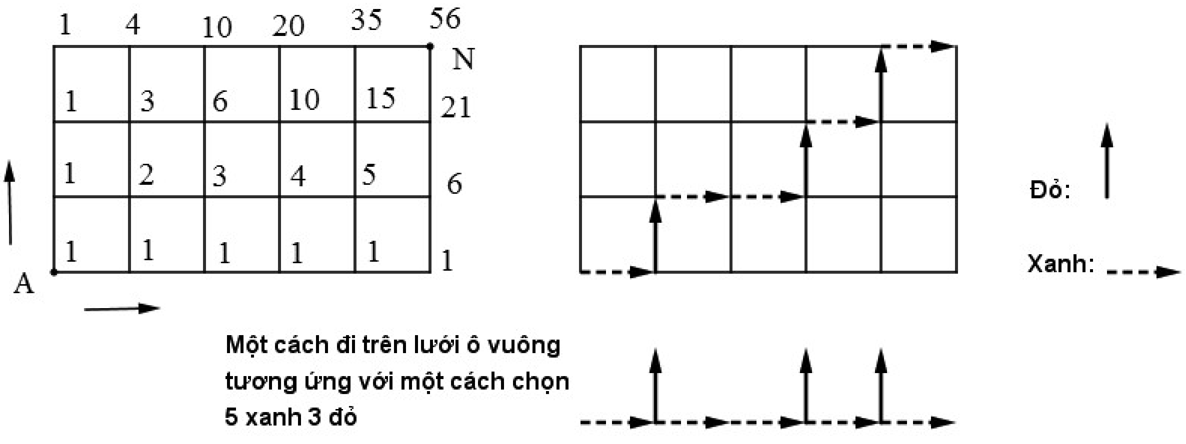
b) Cho 8 $(= 3 + 5)$ *cái ghế giống hệt nhau xếp thành hàng ngang. Có bao nhiêu cách sơn* 3 *chiếc thành màu đỏ và* 5 *chiếc thành màu xanh?*

c) Có 8 *vận động viên. Có bao nhiêu khả năng chọn ra* 3 *vận động viên được giải?*

d) Từ tập hợp có 8 *phần tử, có bao nhiêu cách chọn ra* 3 *phần tử? (Không cần xếp vào hàng).*

e) Chứng minh rằng số cách chọn ra 3 *phần tử mà không cần xếp hàng là* $\dfrac{V_8^3}{3!}$.

Lời giải. a) $\Longleftrightarrow$ (b)



b) $\Longleftrightarrow$ (c). Rõ ràng 3 đỏ tương đương với 3 vận động viên có giải, 5 xanh là 5 vận động viên không được giải.
c) $\Longleftrightarrow$ d) hiển nhiên khi ta thay thuật ngữ vận động viên bằng phần tử.
e) Bài toán xây dựng công thức chỉnh hợp phát biểu là từ một tập có 8 phần tử lấy ra 3 phần tử (mới chỉ chọn ra − chưa xếp vào hàng). Từ 3 phần tử đã được chọn ra ta có 3! cách xếp chúng vào thành một hàng. Số cách là V_8^3. Công việc của ta bây giờ dừng sớm hơn khi mới chỉ lấy ra 3 phần tử mà không cần xếp vào hàng. Vậy số cách sẽ là $\dfrac{V_8^3}{3!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng từ một tập n phần tử có $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ cách chọn ra k phần tử.

Lời giải. Công thức tổng quát nhận được lấy từ công thức chỉnh hợp chia cho $k!$. Tức là $\dfrac{V_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.
Từ tập hợp có n phần tử, số cách chọn ra k phần tử người ta gọi là tổ hợp chập k của n phần tử và ký hiệu nó là $\boldsymbol{C_n^k}$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

4.6. Bài tập thực hành đếm tổ hợp

31. Có 8 đội bóng tổ chức đấu vòng tròn, mỗi cặp gặp nhau một lần. Hỏi có bao nhiêu trận đấu?
HD. *Tổ hợp chập* 2 *của* 8 *là* $C_8^2 = 28$ *trận đấu.*

32. Có 12 công trình, người ta muốn chọn ra 2 công trình để thưởng. Hỏi có bao nhiêu cách?
HD. *Tổ hợp chập* 2 *của* 12 *là* $C_{12}^2 = 66$ *cách.*

33. Cho n đường thẳng, trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Cứ hai đường thẳng cắt nhau được một giao điểm. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm? Thực hiện với $n = 3,\ 4,\ 5,\ 10$.
HD. *Tổ hợp chập* 2 *của* n *là* C_n^2.

b) Trong các số tìm được ở ý a), có bao nhiêu số sử dụng cả 3 chữ số đã cho?

c) Có bao nhiêu số có 3 chữ số chỉ sử dụng 2 chữ số đã cho?

d) Có bao nhiêu số có 3 chứ số mà cả 3 chữ số giống nhau?

HD: a) Ta có $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ số.
b) $P_3 = 6$ *(hoán vị của* $1, 2, 3$*)*.
c) *Từ* 3 *số có* 3 *cách chọn ra* 2 *số. Từ* 2 *số* a *và* b *có* $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$, $\overline{bba}$, $\overline{bab}$, $\overline{abb}$ *tức là có* 6 *số. Vậy toàn bộ sẽ có* $3 \times 6 = 18$ *số.*
d) *Có ba số* 111, 222, 333.
c') *Quay lại trường hợp (c). Số các số chỉ dùng* 2 *chữ số bằng tổng thể* (27 *số*) *trừ đi số các số dùng cả ba chữ số* (6 *số*), *trừ đi số chỉ dùng một số* (3 *số*). *Do đó* $27 - 6 - 3 = 18$ *số.*

50. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4$ có thể lập thành bao nhiêu số có 3 chữ số nếu:

a) Mỗi chữ số chỉ sử dụng không quá một lần?

b) Mỗi chữ số có thể sử dụng số lần tùy ý?

HD. a) *Chỉnh hợp không lặp:* $V_4^3 = \dfrac{4!}{1!} = 24$.
b) *Chỉnh hợp lặp:* $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

5.3. Bài toán chia kẹo – Tổ hợp lặp

Vấn đề được đặt ra tương đối tổng quát và khó, đó là:
– *Có bao nhiêu cách chia k cái kẹo cho n người?*
Trước tiên chúng ta cụ thể hóa các trường hợp chúng ta sẽ quan tâm trong phần lý thuyết nhỏ này.

1. Người nhận kẹo (phần thưởng) là các phần tử xác định và khác nhau từng đôi một. Đôi khi để dễ phân biệt chúng ta đặt tên hay đánh số từng người.

2. Hai trạng thái của kẹo:

- Không phân biệt.
- Đôi một khác nhau.

3. Điều kiện phân chia:

- Mỗi người chỉ nhận không quá một lượng t kẹo nhất định (chỉ làm với $t = 1$).
- Không hạn chế.

Như vậy với n người và k cái kẹo, ta có 4 trường hợp cần xét.
i) Kẹo không phân biệt + mỗi người chỉ nhận không quá 1 cái kẹo.
ii) Kẹo không phân biệt + không hạn chế số lượng kẹo mỗi người được nhận.
iii) Kẹo phân biệt + mỗi người chỉ nhận không quá 1 cái kẹo.
iv) Kẹo phân biệt + không hạn chế số lượng kẹo mỗi người được nhận.

Ví dụ 29. *Có 10 người được thưởng 4 đồ vật. Hỏi có bao nhiêu cách trao giải thưởng nếu:*

i) Các đồ vật được thưởng là giống nhau và mỗi người nhận không quá một đồ vật?

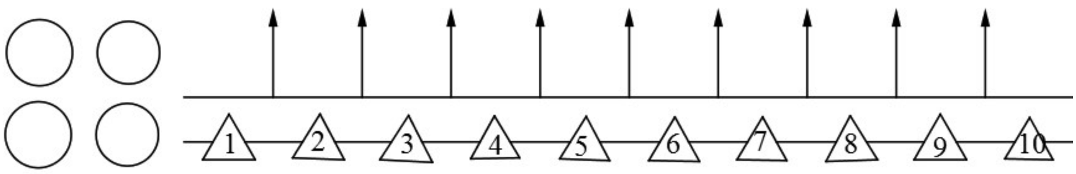
ii) Các đồ vật được thưởng là giống nhau và mỗi người có thể nhận số đồ vật bất kỳ?

iii) Các đồ vật được thưởng là khác nhau và mỗi người nhận không quá một đồ vật?

iv) Các đồ vật được thưởng là khác nhau và mỗi người có thể nhận số đồ vật bất kỳ?

Lời giải. i) Từ 10 người chọn ra 4 người và mỗi người một phần thưởng. Kết quả: $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$ (cách).

ii) Ta dùng 9 que nhỏ chia đường thẳng thành 10 phần (2 nửa đường thẳng và 8 đoạn thẳng). Mỗi một ngăn là của 1 người.



Chương 2

Toán nguyên lý

1. Nguyên lý Dirichlet

1.1. Giới thiệu

Nguyên lý Dirichlet còn được gọi là "Nguyên lý chuồng và chim bồ câu". Nguyên lý được phát biểu như sau:
"Có nhiều bồ câu hơn số chuồng thì thế nào cũng tìm được một chuồng có ít nhất hai con".
Các nguyên lý trở nên đẹp lung linh vì tính đơn giản của nó. Khi người ta áp dụng nó một cách có ý thức trong toán học thì cái đẹp bỗng có tác dụng vô cùng hiệu quả.
Về thực nghiệm là khi ta chỉ cần nhẩm câu thần chú: Hãy cho tôi biết "khi nào cái xấu nhất có thể xảy ra"?

Ví dụ 36. *Gà mẹ đang ấp trứng, có cả trứng gà và trứng vịt. Nếu muốn lấy ra trứng gà, thì phải lấy ít nhất* 5 *quả, nếu muốn lấy ra trứng vịt thì phải lấy ít nhất* 6 *quả. Hỏi gà mẹ đang ấp bao nhiêu quả trứng?*

Lời giải. Phải lấy ra 5 quả để có trứng gà, nghĩa là có 4 quả trứng vịt. Tương tự muốn có trứng vịt phải lấy ra 6 quả trứng, tức là có 5 quả trứng gà. Có ít nhất 4 trứng vịt và 5 trứng gà. Vậy gà mẹ đang ấp $4 + 5 = 9$ quả trứng.

Ví dụ 37. *Trong* 5 *số nguyên tố có hai chữ số, luôn tìm được hai số có hiệu chia hết cho* 10.

Lời giải. Các số nguyên tố có hai chữ số có tận cùng chỉ có thể là số lẻ và khác 5. Do đó có 4 chuồng: $1, 3, 7, 9$. Áp dụng nguyên lý cho bốn chuồng, năm bồ câu ta có ít nhất hai số có tận cùng giống nhau. Vậy hiệu hai số này chia hết cho 10.

1.2. Bài tập thực hành

81. Lớp có 24 học sinh. Mỗi tháng người ta tổ chức mừng sinh nhật cho các bạn cùng tháng sinh.

a) Có chắc chắn hay không rằng có tháng có ít nhất 2 học sinh cùng được chúc mừng?

b) Có thể hay không rằng có tháng không có cuộc chúc mừng nào?

HD. a) *Chắc chắn.* b) *Có thể.*

82. Trong hộp có 10 viên bi đỏ và 10 viên bi vàng hình dạng giống nhau hoàn toàn, chỉ khác về màu sắc. Phải lấy ra bao nhiêu viên bi để chắc chắn có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi vàng?
HD. *Phải lấy ít nhất* 11 *viên.*

83. Trong hầm rượu Tokaij có 13 bình rượu ngọt, 9 bình rượu nửa ngọt và 5 bình rượu khô. Nhà có khách, bà vợ không phân biệt được bình nào đựng rượu gì. Hỏi bà ta phải mang lên cho khách bao nhiêu bình rượu nếu khách yêu cầu:

a) rượu ngọt?

b) 3 bình rượu ngọt?

c) mỗi loại ít nhất 1 bình?

d) toàn bộ loại rượu khô?

e) có rượu ngọt và nửa ngọt?

f) mỗi loại ít nhất 3 bình?

HD. a) 15, b) 17, c) 23, d) *mang cả* 27 *bình,* e) 19, f) 25.

84. Trong lồng kín có 10 con bồ câu màu nâu, 15 con màu xám và 20 con màu trắng. Người ta thả từng con ra một. Phải thả bao nhiêu con để chắc chắn có con bồ câu:

a) Có một màu nào đó chưa có con nào bay ra?

Các bài toán đếm

22. Trong phòng có 10 ngọn đèn. Mỗi cái đều có thể tắt sáng độc lập. Hỏi có bao nhiêu cách thắp sáng sao cho ít nhất có một ngọn trong trạng thái sáng? Bài toán này tương đương với câu hỏi: Một tập hợp có 10 phần tử, có bao nhiêu tập con không rỗng? (Mỗi bóng đèn tương đương với một phần tử, tập rỗng là tập không có bóng nào sáng).

23. Việc nào có khả năng xảy ra lớn hơn giữa: Tung xúc xắc được số 6, hay tung hai lần liên tiếp được cùng một số?

24. Có 10 học sinh rút thăm để nhận 4 quyển sách, mỗi học sinh không được nhiều quá 1 quyển. Hỏi có bao nhiêu cách có thể xảy ra?

25. Tính tổng của các số có 3 chữ số được tạo thành từ các chữ số $5, 6, 7$ sao cho trong mỗi số mỗi chữ số chỉ sử dụng một lần.

26. Tính tổng của các số có 4 chữ số được cấu tạo từ các số $1, 2, 3, 4$ (trong mỗi số các chữ số có thể giống nhau).

27. Tính tổng các số có 3 chữ số mà các chữ số của nó là số chẵn.

28. Có bao nhiêu cách điền các số $1, 2, \dots, 8$ vào giữa các dấu quan hệ
$\dots . < \dots . < \dots . < \dots . > \dots . > \dots . > \dots . > \dots .$?

29. Có bao nhiêu số có ba chữ số sao cho chữ số ở giữa lớn hơn chữ số đứng đầu và đứng cuối?

30. Có bao nhiêu số có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho $b < a + c,\ c < b + a,\ a < b + c$?

2. Suy luận logic

31. Có 32 đội bóng đấu loại trực tiếp để tìm ra đội vô địch. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu?

32. An và Bình đang xếp hàng dọc đợi mua đồ ăn ở căng-tin. Có 15 người đứng sau An và có 20 người đứng trước Bình. An là người thứ 7 đứng trước Bình. Hỏi có tất cả bao nhiêu người đang xếp hàng?

33. Bốn bạn J, M, N, F mỗi người có một con vật cưng: một con mèo, một con chó, một con cá vàng, một con chim sáo. Con của M đầy lông, con của F có 4 chân, con của N là chim sáo, J và M không thích mèo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào không đúng:
– F nuôi chó.
– N nuôi sáo.
– J nuôi cá vàng.
– F nuôi mèo.
– M nuôi chó.

34. Bốn anh em trong cuộc chiến tranh ném gối đã làm vỡ cái bình của bà nội. Mẹ hỏi ai đã làm vỡ? Các con trả lời:
A: Không phải con.
B: Con cũng không.
D: E làm vỡ.
E: B làm vỡ.
Trong các câu trả lời có một câu nói dối. Hỏi ai là thủ phạm?

35. Bốn bạn F, G, L, K đi thăm một người bạn của họ. Họ của bốn cậu bé là K, N, S, M theo một thứ tự nào đó. M đến đầu tiên, người thứ hai đến là L, người thứ ba là K, người cuối cùng là G. Ai cũng mang quà. M mang Rubik, F mang bút, G mang socola, S mang sách. Hỏi họ và tên các chàng trai là gì?

36. Một hội có 15 người ngồi quanh một chiếc bàn tròn. Mọi người đều khẳng định hai người bên cạnh là nói dối. Tất nhiên trong hội có người luôn nói thật, có người luôn nói dối. Ai cũng biết người bên cạnh mình là người như thế nào. Hỏi có bao nhiêu người nói thật đang có mặt?

37. Trong lâu đài chiêm tinh có ba vị thần giống nhau, họ sẵn sàng trả lời nếu có người hỏi. Thần Nói Dối luôn luôn nói dối. Thần Khôn Ngoan lúc nói dối lúc nói thật. Thần Chân Thật luôn luôn nói thật. Người ta nhờ một nhà triết học đến lâu đài để tìm ra ai là thần như thế nào. Nhà triết học hỏi người ngồi giữa:
– Ngài là ai?
Câu trả lời:
– Ta là Thần Khôn Ngoan.
Ông ta hỏi tiếp người ngồi bên phải:
– Ai ngồi cạnh Ngài?
Câu trả lời:

Chương 4

Các chuyên đề

1. Số học tổ hợp

1. Các số trong dạng phân tích thành thừa số nguyên tố sau có bao nhiêu ước số?

a) $2 \cdot 3 \cdot 5$ c) $2 \cdot 2 \cdot 2$ e) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ g) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
b) $2 \cdot 2 \cdot 3$ d) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ f) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Cho n là số nguyên dương. Ký hiệu $d(n)$ là số ước số nguyên dương của n.

Bài toán 8. *Cho n là số nguyên dương bất kỳ.*

a) Nếu n có dạng $n = p^k$ với p là số nguyên tố, $k \in \mathbb{N}$; khi đó $d(n) = k + 1$.

b) Nếu $n = a \cdot b$ và $(a; b) = 1$, khi đó hàm $d(n)$ bảo toàn tính chất nhân: $d(n) = d(a) \cdot d(b)$.

c) Nếu n phân tích thành tích của các số nguyên tố có dạng $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots . p_t^{k_t}$ khi đó:

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots ..(k_t + 1)$$

Ghi chú. Công thức tìm số các ước số của một số được chứng minh hoàn toàn bằng công cụ tổ hợp.

a) Được chỉ ra đơn giản bằng phương pháp liệt kê.

b) Mọi ước số của n có dạng $u \cdot v$, trong đó u là ước của a và v là ước của b.

c) Là kết hợp của các kết quả a) và b).

2. Các số 540 và 2730 mỗi số có bao nhiêu ước số?

3. Không tính toán, hãy xác định các số sau, số ước số lẻ và số ước số chẵn, số nào nhiều hơn?

a) 30 b) 180 c) 210 d) 360 e) 324

4. Hãy xác định:

a) 48 có bao nhiêu ước số không chia hết cho 4?

b) 120 có bao nhiêu ước số không chia hết cho 4?

c) $22 \cdot 32 \cdot 5$ có bao nhiêu ước số không chia hết cho 15?

5. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn biểu thức
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

6. Một cầu thang n bậc, một người đi lên bằng cách lúc bước 1 bậc, lúc nhảy 2 bậc. Hỏi có bao nhiêu cách đi lên đến đỉnh? Hãy làm với $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10$.

7. Có 6 học sinh cùng đi du lịch. Ban đêm họ được chia vào 2 phòng, mỗi phòng 3 giường. Có bao nhiêu cách phân chỗ ngủ nếu:

a) Trong mỗi phòng không tính đến ai nằm chỗ nào?

b) Trong mỗi phòng tính đến ai nằm chỗ nào?

8. Từ bốn chữ số 4, 5, 6, 7 tạo các số có ba chữ số, trong mỗi số các chữ số chỉ có mặt không quá một lần. Có bao nhiêu số được tạo thành? Tổng các số này là bao nhiêu?

9. Từ các chữ số 1, 1, 2, 2, 4 có thể tạo được bao nhiêu số có 5 chữ số và chia hết cho 4? Tổng của các số này là bao nhiêu?

10. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 có thể chọn bao nhiêu cấp số cộng có 3 phần tử?

2. Bài toán liên quan đến quân xúc xắc

Quân xúc xắc là một đồ vật gắn liền với cuộc sống hàng ngày của chúng ta. Khối lập phương (có 6 mặt) là đơn vị gốc cơ bản của ba chiều. Ngay từ thời xưa người ta đã sử dụng hệ đếm cơ số 6 (nửa tá). Trong các quyết định may rủi và phán đoán khả năng (xác suất), người ta thường mượn sự giúp đỡ của xúc xắc.

11. Người ta tung con xúc xắc chuẩn ba lần và kết quả nhận được ghi lại thành một số có ba chữ số.

a) Có bao nhiêu khả năng có thể thu được?

b) Có bao nhiêu kết quả có chứa ít nhất một số 6?

c) Có bao nhiêu kết quả mà các chữ số nhận được lớn hơn 3?

d) Có bao nhiêu kết quả mà các chữ số nhận được đều là số nguyên tố?

12. Người ta tung con xúc xắc chuẩn ba lần và kết quả nhận được ghi lại thành một số có ba chữ số. Số nào có thể nếu cả ba lần tung cho kết quả khác nhau?

13. Người ta tung con xúc xắc chuẩn bốn lần và kết quả nhận được ghi lại thành một số có bốn chữ số. Hỏi có thể có bao nhiêu khả năng khi số có 4 chữ số nhận được là:

a) số chẵn? b) chia hết cho 4?

14. Người ta tung con xúc xắc chuẩn ba lần và kết quả nhận được đem cộng lại với nhau. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra nếu tổng nhận được bằng:

a) 4 b) 5 c) 9 d) 16

15. Người ta tung con xúc xắc chuẩn ba lần và kết quả nhận được là các số lẻ, ghi lại thành một số có ba chữ số chia hết cho 3. Hỏi mỗi lần tung có thể có kết quả là bao nhiêu?

16. Có ba quân xúc xắc màu đỏ, xanh, vàng để trong một cái hộp kín. Người ta lấy ngẫu nhiên một quân và tung nó lên. Hỏi có bao nhiêu khả năng về màu và số có thể xảy ra?

17. Có ba quân xúc xắc màu đỏ, xanh, vàng để trong một cái hộp kín. Người ta lấy ngẫu nhiên hai quân và tung nó lên. Hỏi có bao nhiêu khả năng về màu và số có thể xảy ra?

18. Người ta tung hai con xúc xắc và cộng 2 số tung được với nhau. Hỏi giá trị nào của các tổng có xác suất xảy ra lớn nhất?

19. Nếu tung con xắc xắc lên được 6 thì phải tung lại vì không hợp lệ. Hỏi xác xuất để tung được số 1 là bao nhiêu?

20. Người ta tung con xúc xắc 5 lần, rồi nhân kết quả lại với nhau. Xác suất để tích nhận được có tận cùng bằng 5 là một số hữu tỉ có dạng là phân số tối giản $\frac{p}{q}$. Hỏi giá trị của p là bao nhiêu?

3. Chuyên đề Đảo Thiên Mã

Một hòn đảo nằm xa tít ngoài biển khơi có tên gọi là "Thiên Mã". Trên hòn đảo này có hai bộ tộc đang sinh sống. Một bộ tộc có tên là Kỵ Sĩ và bộ tộc kia làm nghề Ăn Trộm Ngựa. Tất nhiên bộ tộc Kỵ Sĩ thì luôn nói thật và bộ tộc Ăn Trộm Ngựa thì luôn nói dối ....

21. Nếu gặp một thần dân của đảo Thiên Mã và hỏi: "Ngài là Kỵ Sĩ ?" thì câu trả lời của người đó là gì?

22. Du khách gặp hai thổ dân. Một người trong họ nói: "Trong họ có ít nhất một người là Ăn Trộm Ngựa". Hỏi họ là người thuộc bộ tộc nào?

23. Đi tiếp một đoạn du khách lại gặp hai người khác. Một người trong họ nói: "Tôi là Ăn Trộm Ngựa, bạn tôi là Kỵ Sĩ". Hỏi họ là người thuộc bộ tộc nào?

24. Trong bóng râm của một gốc cây có hai thổ dân đang ngồi nghỉ. Người ta hỏi một trong hai người:
− Ngài là Kỵ Sĩ hay Ăn Trộm Ngựa?
A: − .....
Không thể hiểu người đó nói gì, vì thế du khách quay sang hỏi người kia, xem người lúc trước nói gì?
B: − Ông A nói rằng ông ta là Ăn Trộm Ngựa!
Vậy A và B là gì nhỉ?

Chương 5

Tổng hợp – Luyện thi

1. Các bài toán suy luận và biểu đồ Venn

1. Trong một buổi sinh hoạt CLB tài năng toán học có 21 bạn học sinh tham gia. Người nào cũng có bạn cùng lớp đi cùng. Cô giáo hỏi từng người:
– Có mấy bạn cùng lớp tham gia hôm đó?
Đã có 13 câu trả lời, trong đó 5 bạn nói **ba**, 8 bạn nói **bốn**.
Khi đó Thần Đồng nói với cô giáo:
– Thưa cô! Không cần hỏi thêm đâu, như thế này đủ để cho chúng ta đoán được 8 câu trả lời tiếp theo là gì!
Thông Thái nghĩ một chút rồi nói:
– Thần Đồng đúng là thần đồng thật. Theo mình thì bạn đó nghĩ thế này ....
Cô giáo ngắt lời:
– Đây là bài toán có thưởng tuần này. Mọi người hãy tìm xem Thần Đồng và Thông Thái giải thế nào?
Doanh Nhân mỉm cười nói thầm vào tai Xinh Đẹp ngồi bên cạnh:
– Ta phân công nhau đi hỏi những người chưa trả lời là nhanh nhất – đúng không?
Quân Tử ngồi cạnh nghe được nói xen vào:
– Nhưng đòi hỏi của cô giáo là phải giải thích được vì sao các bạn "có vẻ thông minh" đó thông minh thế!
Đề Kan lẩm bẩm:
– "Có thể hack não được hơn không?".

2. Gia đình bác K có ít nhất bao nhiêu đứa con nếu mỗi đứa con đều có ít nhất hai anh em trai và hai chị em gái?

3. Trong các số $-9, -8, \ldots 0, 1, 2, \ldots, 10$ số nào bằng tổng của các số còn lại?

4. Một chiếc đồng hồ chạy chậm 5 phút. Nếu nó chạy nhanh 10 phút thì bây giờ nó chỉ 7 giờ 28 phút. Hỏi bây giờ đồng hồ đang chỉ mấy giờ?

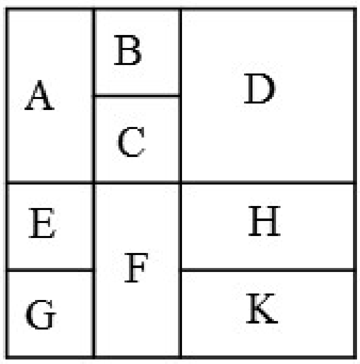
5. Bốn cô gái trong đêm biểu diễn nghệ thuật họ hát tam ca. Mỗi bài hát thì có một bạn nghỉ và ba bạn kia biểu diễn. Anh hát nhiều lần nhất: 7 bài. Minh hát ít nhất: 4 bài. Hỏi các cô gái trình bày tổng cộng bao nhiêu bài hát?

6. Trên hai bờ của biển có hai cảng du lịch. Mỗi buổi sáng lúc 7 giờ từ mỗi cảng có một tàu xuất phát và đi về phía cảng kia. Hành trình kéo dài 170 giờ. Hỏi trên đường đi mỗi chiếc tàu gặp bao nhiêu chiếc tàu khác đang đi ngược hướng?

7. Trên hai bờ của biển có hai cảng du lịch. Mỗi buổi sáng lúc 7 giờ và buổi tối cùng lúc 19 giờ từ mỗi cảng có một tàu xuất phát và đi về phía cảng kia. Hành trình kéo dài 170 giờ. Hỏi trên đường đi mỗi chiếc tàu gặp bao nhiêu chiếc tàu khác đang đi ngược hướng?

8. Phải cần bao nhiêu quả cân (cân được chẵn số gam) cho một bàn cân hai đĩa sao cho tất cả các trọng lượng nguyên gam từ 1 đến 40 gam đều cân được?

9. Người ta phủ một hình vuông lớn bằng các hình vuông nhỏ cùng kích thước. Kết quả được thể hiện trong hình vẽ. Hỏi các hình vuông con được đặt lên theo trình tự nào?



10. Cuộc chạy đua diễn ra giữa ba tuyển thủ X, Y, Z. Khi xuất phát X bứt lên dẫn đầu, bám gót là Y và sau đó là Z. Trong quá trình thi đấu vị trí của Z thay đổi 6 lần, của X thay đổi 5 lần và cuối cùng Y về trước X. Hỏi thứ tự của cuộc thi?

Chương 6

Toán đối tác và lý thuyết Graph

Toán đối tác ở đây chúng ta hiểu là trong công việc có nhiều thành viên tham gia, mỗi thành viên đều có mục đích riêng, vì thế tạo nên một tổng thể cạnh tranh hỗn loạn nhưng đôi khi cũng nảy sinh sự cộng hưởng. Đây là mô hình toán mang tính hiện thực cao, gần gũi hơn trong thực tế và khả năng ứng dụng của nó là điều dễ hiểu.

Trong chương này, chúng ta làm quen với môi trường toán có đối tác thông qua những mô hình toán học như toán bàn cờ, toán trò chơi, và mở đầu cho lý thuyết Graph – một mô hình toán đặc trưng nhất hiện tại với khả năng ứng dụng tất cả mọi nơi.

Với sự phát triển mạnh mẽ của ngành Khoa học máy tính, trong tương lai gần của làn sóng khoa học 4.0, 5.0 ... việc nhanh chóng lĩnh hội và tiếp thu những cái mới của công nghệ là chìa khóa cho cá nhân và xã hội để theo kịp sự phát triển của thời đại. Đây cũng là mục đích mà chúng tôi đề ra để giúp các bạn trẻ sớm được làm quen dưới hình thức học tập nhẹ nhàng nhưng có hiệu quả cao – làm bạn với ngành Khoa học máy tính.

1. Các bài toán trên bàn cờ

1. Trên bàn cờ 5×5 mỗi ô có một con cánh cam. Sau hiệu còi các con cánh cam chuyển sang một ô có chung cạnh với ô vừa đứng. Liệu sau khi đi mỗi ô của bàn cờ vẫn có một con không?

2. Một bàn cờ 8×8 đã đặt ở góc trên bên trái và góc dưới bên phải, mỗi góc một quân cờ. Hỏi có thể phủ kín phần còn lại của bàn cờ bằng những quân domino kích thước 1×2 không?

3. Một bàn cờ ở một góc có một quân cờ. Hỏi có thể phủ kín phần còn lại của bàn cờ bằng những quân domino kích thước 1×3 không?

4. Có thể đặt một quân cờ vào bàn cờ để phần còn lại có thể phủ kín bằng những quân domino kích thước 1×3 không?

5. Có thể phủ bàn cờ 10×10 bằng các quân domino 1×4 không?

Định nghĩa: *Polimino-n là hình được ghép liền cạnh của n hình vuông đơn vị.*

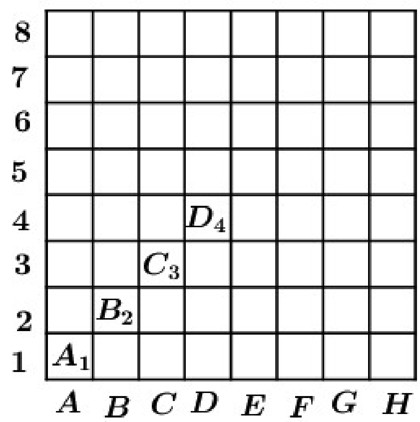
6. Có bao nhiêu quân polimino-4?

7. Tất cả các quân polimino-4 đơn vị mỗi quân sử dụng một lần có thể ghép lại được một hình chữ nhật không?

8. Có bao nhiêu quân polimino-5?

9. Từ tất cả các quân polimino-5 mỗi quân sử dụng một lần có thể ghép lại được một hình chữ nhật. Hãy minh họa bằng hình vẽ. Hình chữ nhật đó kích thước bao nhiêu?

Định nghĩa: *Tên các ô của bàn cờ ví dụ như ở cột thứ A và hàng thứ nhất là ô A_2, cột thứ B và hàng thứ hai là B_2, ...*



10. Có bao nhiêu cách đặt 2 quân xe lên bàn cờ sao cho chúng không ăn lẫn nhau?

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập: (024) 39714896
Quản lý xuất bản: (024) 39728806; Tổng biên tập: (024) 39715011
Fax: (024) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập chuyên môn: HOÀNG LÊ THU HIỀN
Biên tập xuất bản: ĐẶNG THỊ PHƯƠNG ANH
Chế bản: NGÔ THỊ NHÃ
Trình bày bìa: NGUYỄN NGỌC ANH

Đối tác liên kết: Tác giả

Làm quen với Toán: Tổ hợp - Nguyên lý - Graph (dành cho học sinh THCS)

Mã số: 1L-82PT2020

In 1.000 bản, khổ 17×24cm tại Cty TNHH Thanh Long

Địa chỉ: Số 78 tổ 2, phường Vệ An, Thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh.

Số xác nhận ĐKXB: 1768-2020/CXBIPH/02-148/ĐHQGHN, ngày 21/05/2020

Quyết định xuất bản số: 405 LK-TN/QĐ - NXB ĐHQGHN, ngày 10/06/2020

In xong và nộp lưu chiểu năm 2020.