TS. Nguyễn Văn Lợi

TRÒ CHƠI TOÁN HỌC

HÀM SPRAGUE - GRUNDY

Chương trình bồi dưỡng và phát triển năng lực

ĐỒNG HÀNH CÙNG

LOISCENTER

Mục đích:

Trước 18 tuổi được trang bị kiến thức

- Khoa học Toán - Máy tính
- Kỹ năng lập trình code - hệ thống
- Toán kinh tế - MBA

Đầu tư cho tương lai – Thông minh nhất – Hiệu quả nhất

SĐT: 096 568 5459

Đôi lời chia sẻ

Chỉ 10 – 20 năm nữa khi làn sóng công nghệ 4.0 sẽ định hình lại cấu trúc cuộc sống và xã hội. Cái đói nghèo đã được trả về cho quá khứ, lúc đó lao động không còn là để tồn tại mà chủ yếu nhằm mục đích sáng tạo và tiến bộ.

Các công việc sẽ tập trung vào 4 nhóm:

- Nghệ thuật
- Khoa học kỹ thuật
- Dịch vụ
- Sức khỏe và Thể thao

Tùy thuộc khả năng, con người có thể lựa chọn các thể loại công việc phù hợp. Nhưng bất kì công việc gì yếu tố sáng tạo và thi đua sẽ được đưa lên hàng đầu.

Chúng tôi chọn công việc chuẩn bị hành trang *tri thức khoa học kỹ thuật* cho lớp công dân thời đại 4.0 làm nhiệm vụ chính của mình.

Mục lục

Hà Nội, ngày 30 tháng 5 năm 2019

1 Trò chơi toán học I

1.1. Người ta xếp n con tượng gỗ thành hàng. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể làm đổ một hay hai con tượng gỗ đứng cạnh nhau. Hỏi người nào có chiến thuật để thắng trận?

1.2. Người ta xếp n con tượng gỗ thành vòng tròn. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể làm đổ một hay hai con tượng gỗ đứng cạnh nhau. Hỏi người nào có chiến thuật để thắng trận?

1.3. Có 2 cái xuyến tròn màu đỏ, 2 xuyến vàng, 2 xuyến xanh và 2 xuyến nâu. Hai người chơi gắn các xuyến này lên đỉnh của một khối lập phương mỗi đỉnh một cái. Người đi đầu chiến thắng nếu có tạo được một cạnh có 2 đầu có xuyến cùng màu, ngược lại thì người thứ hai thắng trận. Hỏi người nào có chiến thuật thắng trận?

1.4. Hai đống có lần lượt 60 và 70 viên sỏi trên bàn. Hai người chơi. Mỗi lần có thể lấy tùy ý từ một đống nào đó một vài viên (ít nhất 1 viên, nhưng có thể lấy tất cả). Người thắng là người lấy sau cùng. Hỏi ai có chiến thuật thắng trận?

1.5. Ba đống có lần lượt 1, 65 và 117 viên sỏi trên bàn. Hai người chơi. Mỗi lần có thể lấy tùy ý từ một đống nào đó một vài viên (ít nhất 1 viên, nhưng có thể lấy tất cả). Người thắng là người lấy sau cùng. Hỏi ai có chiến thuật thắng trận?

1.6. Người ta xếp xuống mặt bàn theo hình vuông kích thước:

a) 5×5 b) 6×6

mỗi ô một viên sỏi. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy 1 hoặc 2 viên sỏi cạnh nhau "theo cạnh". Người lấy cuối cùng là người thắng. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng?

1.7. Trên bàn cờ 8×8. Quân xe đứng ở góc trái bên dưới. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể đi một số ô sang phải hoặc lên trên. Người nào đưa được quân xe đến đích là ô bên phải phía trên thì người đó thắng trận. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng trận?

1.8. Trên bảng có một số cho trước. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể chọn một chữ số khác 0 của số trên bảng. Lấy số trên bảng trừ đi chữ số đã chọn rồi xóa số đã có trên bảng thay bằng hiệu số mới vừa được tạo thành. Người thắng trận là người tạo được số cuối cùng là số 0. Hỏi ai có chiến thuật thắng?

1.9. Trên bàn có 27 que diêm. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy 1, 2 hoặc 3 que diêm. Ai lấy que cuối cùng là thắng. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng?

1.10. Trên bàn có 27 que diêm. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy 2 hoặc 3 que diêm, cuối cùng có thể lấy 1 que. Ai lấy que cuối cùng là thắng. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng?

1.11. Trên bàn có 40 que diêm. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy 2, 3, 4 hoặc 5 que diêm. Ai lấy que cuối cùng là thắng. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng?

1.12. Trên bàn có 40 que diêm. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy 2, 3, 4 hoặc 5 que diêm. Ai lấy que cuối cùng là thua. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng?

1.13. Trên bàn có 101 viên sỏi. Hai người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy $1, 2, 3, 4$ hoặc 5 viên sỏi. Cuộc chơi kết thúc khi có người lấy viên cuối cùng. Người đi đầu thắng nếu số sỏi của hai người nguyên tố cùng nhau, ngược lại thì người thứ 2 thắng. Hỏi ai có chiến thuật luôn thắng?

1.14. Hai người thay phiên nhau chia một trong những đống sỏi trên bàn thành hai đống sao cho mỗi đống có ít nhất một viên. Người thắng là người chia được lần cuối cùng. Ai có chiến thuật thắng nếu lúc đầu tiên có một đống 1991 viên sỏi?

1.15. Trên bảng được ghi ....$x^3 + \ldots .x^2 + \ldots .x + \ldots . = 0$. Hai người thay phiên nhau ghi vào chỗ trống các hệ số thực.
Mục đích của người thứ hai là luôn nhận được một đa thức có nghiệm nguyên. Hỏi người này có luôn đạt được mục đích hay không?

1.16. Trên bảng được ghi $x^3 + \ldots .x^2 + \ldots .x + \ldots . = 0$. Hai người thay phiên nhau ghi vào chỗ trống các hệ số thực.
Mục đích của người thứ nhất là luôn nhận được một đa thức có ba nghiệm nguyên. Hỏi người này có luôn đạt được mục đích hay không?

1.17. Trên bảng được ghi $x^3 + \ldots .x^2 + \ldots .x + \ldots . = 0$. Hai người thay phiên nhau ghi vào chỗ trống các hệ số thực.
Mục đích của người thứ nhất là luôn nhận được một đa thức có chỉ một nghiệm thực. Hỏi người này có luôn đạt được mục đích hay không?

1.18. Trên bảng được ghi $\ldots .x^2 + \ldots .x + \ldots . = 0$. Người thứ nhất được chọn 3 số thực, người thứ 2 được ghi các số này vào vị trí của các hệ số theo thứ tự tùy chọn, mỗi số một vị trí.
Mục đích của người đi đầu là luôn tạo được phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Hỏi người thứ nhất có luôn đạt được mục đích hay không?

1.19. Cho hệ phương trình (chưa có các hệ số của các ẩn số):

$$\begin{aligned} \ldots x + \ldots y + \ldots z = 0 \\ \ldots x + \ldots y + \ldots z = 0 \\ \ldots x + \ldots y + \ldots z = 0 \end{aligned}$$

Hai người thay nhau ghi các hệ số tự chọn của các biến vào vị trí tùy ý và còn trống. CMR người thứ nhất có chiến thuật luôn tạo được một hệ phương trình có nghiệm khác 0.

1.20. Hai người chơi chiếm các số nguyên. Người đi đầu tiên thắng nếu chiếm được ba số liên tiếp nhau. Ngược lại thì người thứ hai thắng. Hỏi ai có chiến thuật thắng?

1.21. Hai người thay nhau viết các chữ số của một số có n chữ số. Người đi đầu tiên thắng nếu nhận được số chia hết cho 9. Ngược lại, người thứ hai thắng. Hỏi ai có chiến thuật luôn luôn thắng?

2 Trò chơi toán học II

2.1. Người ta lần lượt sơn các đỉnh của một đa giác đều $2n$ cạnh bằng hai mầu xanh và đỏ. Hai người chơi, họ thay nhau nối các đường chéo có đỉnh cùng màu sao cho trong đa giác các đường chéo không cắt nhau. Người thua là người không đi tiếp được. Hỏi ai có chiến lược thắng trận?

2.2. Người ta điền lần lượt các số $1, 2, 3, \ldots, n$ lên các đỉnh của đa giác đều theo một chiều nào đó. Hai người chơi, họ vẽ các đường chéo có đỉnh cùng tính chẵn lẻ sao cho các đường chéo không cắt nhau bên trong đa giác. Ai không đi được tiếp tục thì thua. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.3. Trên bàn có 2 đống sỏi. Hai người chơi. Họ thay nhau bốc sỏi, hoặc từ một đống lấy 1 viên, hoăc từ cả 2 đống, mỗi đống lấy 1 viên. Người lấy viên cuối cùng là người thắng. Ai có chiến lược thắng?

2.4. Hai người chơi, họ lần lượt đặt các quân mã lên bàn cờ 9×9, sao cho không con nào ăn được con nào. Người nào không đi được tiếp là thua. Hỏi ai có chiến thuật thắng?

2.5. Hai người chơi, họ lần lượt đặt các quân vua lên bàn cờ, sao cho không con nào ăn được con nào. Người nào không đi được tiếp là thua. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.6. Hai người chơi, họ lần lượt xếp quân đomino 1×2 lên bàn cờ 10×10 sao cho mỗi quân domino phủ đúng 2 ô vuông. Người không đi được tiếp là người thua. Hỏi ai có chiến thuật thắng?

2.7. Hình khối hộp chữ nhật được xếp bởi các khối lập phương đơn vị. Hai người thay nhau sơn các cột của khối hộp chữ nhật này, mỗi người một cột. (Cột có thể nằm ngang hoặc đứng thẳng tùy ý), chỉ có thể sơn những cột mà chưa có khối lập phương con nào bị sơn. Người nào không đi tiếp được là thua. Nếu kích thước của khối hộp chữ nhật là

a) $4 \times 4 \times 4$ b) $4 \times 4 \times 3$ c) $4 \times 3 \times 3$

Hỏi trong mỗi trường hợp ai có chiến lược thắng?

2.8. Hai người thay nhau viết các số lên các ô vuông của bàn cờ 9×9. Người đi đầu ghi số 0, người thứ hai ghi số 1. Cuối cùng người ta đếm số các cột và các hàng có bao nhiêu lần có số 0 nhiều hơn số 1 (và ngược lại). Người thắng là người mà số của mình có số lượng các hàng và cột thắng nhiều hơn. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.9. Hai túi kẹo, mỗi gói có 9 viên. Hai người chơi lấy kẹo: Mỗi lần có thể lấy từ một túi 1 viên kẹo đặt sang túi kia rồi lấy từ một túi nào đó lấy cho mình 2 viên kẹo. Người lấy viên cuối cùng là người thắng. Ai có chiến lược thắng?

2.10. Hai túi sỏi, mỗi gói có 9 viên. Hai người chơi lấy sỏi: Mỗi lần có thể lấy từ một túi 1 hoặc 2 viên sỏi hoặc được lấy từ cả hai túi mỗi túi 1 viên. Người lấy viên cuối cùng là người thắng. Ai có chiến lược thắng?

2.11. Hai người thay nhau xếp quân xe lên bàn cờ 8×8, sao cho không con nào được ăn con nào. Người không xếp tiếp được là thua. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.12. Hai người thay nhau sơn các ô vuông của bàn cờ 10×10. Mỗi bước đi người ta có thể sơn một hình kích thước 1×1 hoặc 1×2 hoặc 1×3 các ô vuông con nếu trong đó chưa ô nào bị sơn. Người thua là người không thể đi tiếp. Ai có chiến lược thắng?

2.13. Có bảng Socola kích thước 10×5 ô. Hai người chơi. Mỗi lần đến lượt người chơi có thể bẻ theo "đường lưới" của một mảnh trong các mảnh được phát sinh trong quá trình chơi. Cuộc chơi kết thúc nếu có mảnh 1×1. Người thắng là người:

a) Có trước b) Có sau

mảnh 1×1.

2.14. Trên mặt phẳng cho a) 5 , b) 6 điểm tổng quát. Hai người chơi. Mỗi lần người đến lượt được chọn nối hai điểm chưa bị nối và tô màu của riêng mình đã chọn từ trước. Người thua là người buộc lòng có trước tam giác có các cạnh đồng màu. Ai là người có chiến lược thắng trận?

2.15. Trên mặt phẳng có 6 điểm tổng quát. Hai người chơi nối các đỉnh này với nhau. Người thua là người đầu tiên tạo thành hình tam giác có các đỉnh từ các đỉnh đã cho. CMR người đầu tiên có chiến thuật thắng.

2.16. Hai người thay nhau đánh dấu các điểm nút trên lưới ô vuông, mỗi lần một điểm nếu điểm này chưa bị đánh dấu và các điểm bị đánh dấu là đỉnh của một đa giác lồi. Người không đi được tiếp là người thua. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.17. Có 25 que diêm trên bàn. Hai người lần lượt lấy mỗi lần 1, 2 hoặc 3 que diêm tùy ý. Người thắng là người lấy lần cuối cùng đúng 2 que diêm.

2.18. Trên bàn có n que diêm. Hai người thay nhau lấy 2^k que diêm $(1, 2, 4, \ldots)$. Người nào lấy que cuối cùng là người đó thắng. Ai có chiến lược thắng?

2.19. Trên bàn có n que diêm, 2 người chơi. Mỗi lần mỗi người có thể lấy k que diêm nếu k và số diêm trên bàn là nguyên tố cùng nhau. Người thắng là người lấy cuối cùng. Hỏi ai có chiến lược thắng trận?

2.20. Trên bàn có $2n + 1$ viên bi, có hai người chơi. Mỗi lần mỗi người lấy không quá một nửa số bi ban đầu. Người thắng trận là người có số bi là số chẵn khi trên bàn không còn bi nữa. Hỏi ai có chiến lược thắng trận?

2.21. Có n viên sỏi trên bàn, 2 người chơi bốc sỏi. Người đi đầu tiên không được lấy toàn bộ số sỏi khi bắt đầu. Người tiếp theo phải lấy ít nhất 1 nhưng không được lấy quá số sỏi bằng hai lần số sỏi người đi trước lấy. Người lấy cuối cùng là người thắng trận. Hỏi ai có chiến lược thắng trận?

2.22. Trên bàn có số lẻ viên bi, hai người chơi, mỗi người có thể lấy $1, 2$ hoặc 3 viên. Sau khi hết bi, người nào có số bi chẵn là người đó thắng. Hỏi ai có chiến lược luôn luôn thắng?

2.23. Trên bàn có các đống sỏi. Hai người chơi chia sỏi. Mỗi lần mỗi người chọn một đống có ít nhất hai viên sỏi và chia ra thành hai phần. Họ cứ làn như vậy cho đến khi mỗi đống chỉ còn 1 viên. Ai là người có chiến thuật thắng nếu lúc đầu:

a) Trên bàn có một đống 31 viên sỏi.

b) Trên bàn có một đống 100 viên sỏi.

2.24. Hai người chơi. Người thứ nhất nói một số lớn hơn và nhỏ hơn 10. Người thứ 2 nhân số này với một số thỏa mãn điều kiện trước đó. Với tích vừa nhận được người thứ 1 lại nhân với một số thỏa mãn điều kiện ban đầu và cứ tiếp tục như vậy. Người thắng cuộc là người lần đầu tiên có kết quả vượt qua 1000 trước tiên. Ai có chiến thuật thắng?

2.25. Hai người thay nhau nói các số. Người đầu tiên bắt đầu bằng số 1. Người tiếp theo được quyền nói một số ít nhất lớn hơn số đã có 1 đơn vị nhưng không được nói số lớn hơn tổng của số đã có với tổng các chữ số của nó. Người thắng cuộc là người nói số 100. Ai có chiến lược thắng?

2.26. Trên bàn cờ 8×8 hai người thay nhau đẩy một quân cờ. Bắt đầu xuất phát từ góc dưới bên trái của bàn cờ. Người ta có thể đẩy sang phải, đi lên hoặc đi chiều từng bước một. Người thắng trận là người đẩy được quân cờ vào ô phía trên bên phải bàn cờ. Ai là người thắng? Tại sao?

2.27. Trên bàn cờ $n \times m$, quân vua bên đen đứng ở góc phía trên bên trái. Hai người chơi, mỗi người thay nhau bước quân vua đến ô bên cạnh hoặc cùng đỉnh nhưng chưa đi qua lần nào. Người thua trận là người không đi được trước. Hỏi ai có chiến thuật thắng trận?

2.28. Trên bàn cờ 8×8, hai người A và B thay nhau đi một quân cờ. Bắt đầu xuất phát từ góc trên bên trái của bàn cờ. Người ta có thể đi sang phải không quá 4 bước, hay đi thẳng xuống không quá 3 bước. Cứ như vậy đến khi quân cờ nằm ở ô phía dưới bên phải bàn cờ. Người đưa quần cờ vào vị tri phía dưới bên phải bàn cờ là

a) Người thắng;

b) Người thua.

Ai có chiến lươc thắng?

2.29. Trên bàn cờ 8×8 phía dưới bên trái có quân hậu. Hai người A và B thay nhau đi. Mỗi bước đi có thể đi theo luật cờ thông dụng nhưng thêm điều kiện sau mỗi bước quân hậu càng tiến về gần góc phải phía trên hơn. Người thua là người phải đưa quân hậu vào ô vuông phía trên bên phải. Ai có chiến thuật thắng?

2.30. Hãy chứng minh rằng trong những trò chơi hữu hạn hai người chơi không có kết quả hòa luôn luôn có chiến thuật cho chỉ một người luôn luôn thắng.

2.31. Người ta viết lên bảng m số 1 và n số 2. Hai người chơi. Đến lượt ai họ được phép xóa đi hai số và ghi thay vào đó số 2 nếu 2 số bị xóa giống nhau, trường hợp khác thì ghi số 1. Sau một số thao tác như vậy thì trên bảng chỉ còn 1 số. Nếu số còn lại là số 1 thì người đi đầu thắng, nếu khác thì người thứ 2 thắng. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.32. Hai người chơi, người ta có thể ghi lên bảng các số nguyên dương không lớn hơn một số n cho trước. Người thua là người ghi lên bảng một số mà là ước số của một số nào đó đã được ghi lên bảng trước đó. Hãy chỉ ra rằng người đi đầu luôn có chiến lược thắng trận. Chiến thuật đó là thế nào nếu $n = 10$?

2.33. Hai người chơi, người ta ghi các ước số của một số n cho trước lên bảng. Người thua là người viết một số là ước số của số nào đó đã ghi trước đó. Hãy chỉ ra rằng người đi trước luôn thắng trận. Chỉ ra chiến thuật cụ thể nếu $n = 72$.

2.34. Người ta ghi hai số 25 và 36 lên bảng. Hai người thay phiên nhau ghi tiếp lên bảng số mới là số bằng hiệu của hai số nào đó ở trên bảng mà chưa được ghi. Người thua là người không đi được tiếp. Ai có chiến thuật thắng trận?

2.35. Trên bảng được ghi $\ldots . x^3 + \ldots . x^2 + \ldots . x + \ldots . = 0$. Hai người thay phiên nhau ghi vào chỗ trống các hệ số thực. Mục đích của người thứ hai là luôn nhận được một đa thức có nghiệm nguyên. Hỏi người này có luôn đạt được mục đích hay không?

2.36. Trên bảng được ghi $\ldots . x^3 + \ldots . x^2 + \ldots . x + \ldots . = 0$. Hai người thay phiên nhau ghi vào chỗ trống các hệ số thực. Mục đích của người thứ nhất là luôn nhận được một đa thức có ba nghiệm nguyên. Hỏi người này có luôn đạt được mục đích hay không?

2.37. Trên bảng được ghi $x^3 + \ldots . x^2 + \ldots . x + \ldots . = 0$. Hai người thay phiên nhau ghi vào chỗ trống các hệ số thực. Mục đích của người thứ nhất là luôn nhận được một đa thức có chỉ một nghiệm thực. Hỏi người này có luôn đạt được mục đích hay không?

2.38. (Kẹo bị nhiễm độc) Có bảng socola $(n \times k)$ ô. Trong đó ô trên cùng bên trái bị nhiễm độc. Hai người chơi. Mỗi lần đến lượt đi, người đi chọn một ô và từ ô đó phải bẻ từ ô đó sang phải và xuống dưới thanh của mình. Người thua là người phải lấy ô bị nhiễm độc. Hãy giải bài toán trong các trường hợp sau

a) $n \times n$ b) $2 \times n$

2.39. CMR trong bài toán Socola nhiễm độc người thứ nhất luôn có chiến thuật thắng nếu socola có nhiều hơn 1 ô vuông.

2.40. Trò chơi cờ vua bước kép là trò chơi cũng giống như thông dụng nhưng mỗi lần đi người ta bước hai bước liền nhau. Chứng minh rằng người đi đầu có chiến lược không thua.

2.41. Trong trò chơi cờ caro hãy chỉ ra rằng người đi đầu luôn có chiến lược không thua (bàn cờ hữu hạn ô).

2.42. Trong bàn cờ 5×5 có hai người chơi. Người thứ nhất luôn đánh cho mình một dấu (1 ô), người thứ hai luôn đánh cho mình 2 dấu vào các ô còn trống. Người thắng trận là người có 5 kí hiệu của mình trước theo hàng dọc hoặc hàng ngang. Người thứ hai có khả năng thắng trận. Tại sao?

2.43. Hai người chơi trên bàn cờ 10×10. Họ thay nhau ghi các kí tự (X) hoặc (O) tùy chọn lúc đó vào ô theo ý thích của mình. Người thắng trận là người lần đầu tạo được ba kí hiệu đứng giống nhau đứng cạnh nhau theo hàng. Hỏi ai có chiến lược thắng trận?

2.44. Ở trung tâm bàn cờ 11×11 có một quân cờ. Hai người chơi. Họ thay nhau đẩy quân cờ đến ô khác chưa qua bao giờ và khoảng đẩy luôn lớn hơn so với khoảng cách trước đó (khoảng cách giữa hai vị trí là độ dài ngắn nhất của đường đi theo chiều ngang và chiều dọc hợp lại). Người thua là người không đi tiếp được. Ai có chiến lược thắng cuộc?

2.45. Trên bàn cờ $n \times n$ ở góc trái bên dưới có một quân cờ. Hai người chơi, họ thay nhau cho quân cờ đi. Khi đi chỉ được bước vào ô có cạnh chung và chưa đi qua bao giờ. Người thua là người không đi được tiếp. CMR nếu n chẵn thì người đi trước có chiến lược thắng, nếu n lẻ thì người thứ 2 thắng. Tình hình sẽ thế nào nếu quân cờ xuất phát từ vị trí cạnh vị trí ở góc bàn cờ?

2.46. Hai người chơi. Một người đặt quân mã vào một vị trí nào đó tự chọn. Sau đó họ thay nhau bước theo luật đi khi chơi cờ, nhưng không được đi vào vị trí trước đó đã qua. Người thua là người không đi được tiếp. Ai có chiến lược thắng cuộc nếu:

a) Bàn cờ kích thước 8×8

b) Bàn cờ kích thước $m \times n(m \geq n \geq 3$?

2.47. Hai người thay nhau ghi các chữ số của một số có $2n$ chữ số. Các chữ số chỉ được phép là $6, 7, 8$ hoặc 9. Người đi đầu thắng cuộc nếu số nhận được không chia hết cho 9, ngược lại thì người thứ 2 thắng. Hỏi ai có chiến lược luôn thắng cuộc?

2.48. Hai người thay nhau ghi các chữ số của một số có $2n$ chữ số. Các chữ số chỉ được phép là 1, 2, 3, 4 hoặc 5. Người thứ 2 thắng cuộc nếu số nhận được chia hết cho 9, ngược lại thì người thứ 1 thắng. Hỏi ai có chiến lược luôn thắng cuộc?

2.49. Hai người chơi một trò chơi như sau: Người ta ghi các số từ 1 đến 100 liên tiếp cạnh nhau. Sau đó ở 99 vị trí giữa các số người ta thay nhau ghi các phép tính cộng $(+)$ trừ $(-)$ nhân $(\times)$ theo ý thích. Cuối cùng họ tính giá trị của biểu thức nhận được. Nếu giá trị là số chẵn thì người đi đầu thắng, nếu lẻ người thứ 2 thắng. Ai có chiến lược thắng cuộc? Ai có chiến lược thắng trận nếu thay đổi điều kiện: người thứ nhất thắng nếu là số lẻ?

2.50. Trên mặt bàn người ta xếp thành hàng 7 hình tròn. Mỗi hình tròn có một mặt đen và mặt kia màu trắng. Các hình trên bàn trong các mặt được lát lên trên một số mặt màu đen còn các mặt kia màu trăng. Hai người chơi. Mỗi người khi đến lượt được chọn cho mình một hình tròn có mặt trắng được lật lên trên, hình đó và các hình nằm về bên phải nó được lật để mặt phía sau được lên trên. Chơi tiếp tục cho đến khi có người không bước tiếp được thì người đó thua. Hỏi ai có chiến lược thắng?

2.51. Trên cầu thang $2n+1$ bậc. N bậc bên dưới mỗi bậc có một viên đá.
Hai người chơi A và B. A được phép chuyển bất kì viên đá nào lên bậc phía trên đầu tiên chưa có đá. B được xếp bất kì viên đá nào lùi xuống một bậc nếu bậc đó chưa còn trống. Hỏi B có thể cản không cho A đạt được vị trí cao nhất của cầu thang hay không nếu A bắt đầu?

2.52. Trên bàn có 9 tấm bìa mỗi tấm được ghi một số từ các số $1, 2, 3, \ldots, 9$. Hai người chơi. Mỗi người lần lượt cho mình một tấm bìa. Người thắng là người tổng các số trên tấm bìa của mình có giá trị 15 trước. Ai có chiến lược thắng?

2.53. Từ các số $1, 2, \ldots, 101$ hai người chơi, họ thay nhau lấy đi mỗi lần 9 số. Sau 11 lần đi còn lại hai số. Người đi đầu thắng nếu hiệu hai số là 55. Hỏi người thứ nhất có thể luôn thắng trận hay không?

2.54. Từ các số $1, 2, \ldots, 27$ hai người chơi, họ thay nhau lấy đi mỗi lần 1 số, cho đến khi còn lại hai số. Người đi đầu thắng nếu tổng hai số chia hết cho 5. Ai có chiến lược luôn thắng cuộc?

2.55. Từ các số $1, 2, \ldots, 1024$ hai người chơi, họ thay nhau đi. Lần đầu tiên lấy 512 số, lần thứ 2 lấy 256 số, lần thứ 3 lấy 128 số,... sau lần thứ 8 thì còn lại hai số. Người đi đầu thắng cuộc nếu giá trị tuyệt đối của hiệu hai số ít nhất bằng m. Hỏi với giá trị như thế nào thì có lợi cho người đi đầu tiên?

3 Gợi ý giải phần trò chơi toán học

Bài 1.1. *Người đi đầu thắng.*
Nếu n lẻ chọn cây ở giữa, nếu n chẵn lấy 2 cây ở giữa. Sau đó dùng chiến thuật đối xứng.

Bài 1.2. Người 2 thắng.
Sau khi người 1 đi bất kì, quay lại bài toán xếp thành hàng nêu trên.

Bài 1.3. *Người đi thứ 2 thắng.*
Lọn chọn đỉnh đôi xứng tâm, đặt cùng màu.

Bài 1.4. *Người đi đầu.*
Lần đầu lấy 10 viên sỏi từ túi có 70 viên, tạo thế đối xứng.

Bài 1.5. Người đi đầu thắng. (Tổng nim bằng 0). Bắt đầu tạo thế $(1, 64, 65)$ sau đó theo các thế $(1, 2m, 2m + 1)$ hoặc $(0, m, m)$.

Bài 1.6. a) Người đi đầu thắng. Lấy viên sỏi trung tâm.

b) Người thứ 2 thắng.

Sau đó dùng đối xứng.

Bài 1.7. Người đi thứ 2 thắng. Luôn đẩy quân xe vào vị trí đường chéo chính.

Bài 1.8. Người đi trước nếu chữ số hàng đơn vị khác 0. Chiến thuật: Luôn để lại các chữ số cuối cùng là 0.

Bài 1.9. Trò chơi Nim. Để lại số que diêm là bội của 4.

Bài 1.10. Nim. Để lại trên bàn bội của 5 số que diêm.

Bài 1.11. Nim. Để lại bội của 7 que diêm.

Bài 1.12. Nim. Để lại $7n + 2$ que diêm.

Bài 1.13. Người 1 luôn thắng. Nếu $d = (a, b)$ thì $d \mid 101$. Nhưng 101 nguyên tố $\Rightarrow d = 1$.

Bài 1.14. Xét tính chẵn lẻ của số sỏi. Cần chia 1990 lần. Người 2 luôn thắng.

Bài 1.15. Chọn hệ số cuối cùng sao cho tổng các hệ số $a + b + c + d = 0$. Khi đó có nghiệm nguyên $x = 1$.

Bài 1.16. Đạt được: $x^3 + kx^2 - x - k = (x - 1)(x + 1)(x + k)$.

Bài 1.17. Đạt được: $x^3 + ax^2 + x + a = (x^2 + 1)(x + a)$.

Bài 1.18. Chọn ba số khác nhau và khác 0, sao cho $a+b+c=0$, như thế một nghiệm là 1 và nghiệm kia là $\frac{c}{a} \neq 1$.

Bài 1.19. Người 1 có thể đạt mục đích. Chiến thuật: luôn tạo thế hệ số của y và z giống nhau. Khi đó nghiệm sẽ là $(0, 1, -1)$.

Bài 1.20. Người 2 thắng. Luôn chọn số bên trái số của người thứ 1 chọn, nếu hết chỗ chọn bên phải. Nếu không còn chỗ thì chọn tự do.

Bài 1.21. Nếu n chẵn người thứ 2 thắng. Nếu n lẻ người thứ nhất thắng. (Tổng các chữ số chia hết cho 9).

Bài 2.1. Nếu n chẵn người đi đầu thắng, n lẻ người thứ hai thắng. Sử dụng đối xứng tâm.

Bài 2.3. Chiến lược đối xứng. Người thắng nếu luôn để lại số sỏi chẵn ở cả hai đống.

Bài 2.4. Chiến lược đối xứng. Người 2 luôn thắng.

Bài 2.5. Người đi đầu tiên thắng. Bước đầu chiếm vị trí trung tâm. Rồi sau đó luôn chiếm vị trí đối xứng tâm với vị trí của người hai đi.

Bài 2.6. Đối xứng tâm. Người 2 thắng.

Bài 2.7. Nếu tâm đối xứng của khối hộp nằm trong một khối lập phương con thì người đi đầu thắng (bước đầu chiếm khối này). Chiến thuật đối xứng tâm cho cả hai người.

Bài 2.8. Người đi đầu thắng. Đầu tiên chiếm vị trí trung tâm. Dùng chiến lược đối xứng tâm.

Bài 2.9. Người đi đầu thắng. Luôn tạo số kẹo $8-8,\ 6-6\ \ldots$ để lại các cặp chẵn bằng nhau.

Bài 2.11. Dùng chiến lược đối xứng tâm bàn cờ.

Bài 2.19. Nếu n lẻ, người đi đầu thắng vì chỉ cần luôn luôn lấy hai que diêm thì sẽ còn lại luôn luôn là số lẻ. Nếu n chẵn thì người thứ hai luôn thắng theo trên.

Bài 2.20. TH1: Số bi chia 4 dư 3. Người đi trước có chiến lược thắng.
TH2: Số bi chia 4 dư 1, tức là $g = 4k+1$. Lần đầu NT1 lấy $2k-2$ viên bi, nếu trong số $2k+3$ viên bi còn lại, NT2 lấy lớn hơn 3 viên bi và không quá $2k$ viên, khi đó nếu số bi còn lại là chẵn thì NT1 lấy tất, còn số bi còn lại là lẻ thì lấy chỉ bớt lại một viên.
Nếu NT2 chỉ lấy 1 viên bi thì NT1 cũng chỉ lấy tiếp 1 viên và quay lại tình trạng thứ nhất.
Như vậy nếu $g \geq 3$ và $g \neq 5$ thì người đi đầu luôn thắng. Nếu $g = 1$ hoặc 5 thì NT1 thua.

Bài 2.23. a) NT2. b) NT1.

Đích: Trong đống nhiều nhất luôn luôn có $2^k - 1$ viên sỏi.

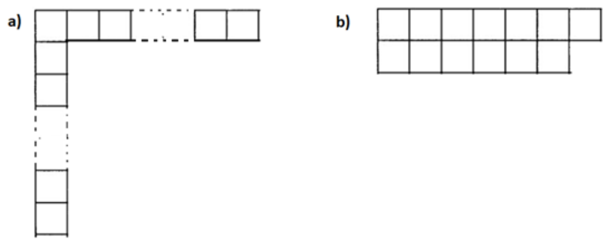
Bài 2.27. Nếu $m \times n$ chẵn thì NT1 thắng. Nếu $m \times n$ lẻ thì NT2 thắng. (Cần có hình vẽ và giải thích thêm)

Bài 2.30. Hãy lập đồ thị cây của trò chơi này, mỗi một cành là một tình trạng của trò chơi và các cạnh của graph chỉ ra rằng từ tình trạng này đến tình trạng kia có thể đi ra sao. Chứng minh bằng quy nạp theo độ cao của cây.

Bài 2.32. Theo bài trên, chắc chắn có người nào đó có chiến thuật thắng trận. Ta sẽ chỉ ra rằng người thứ hai không thể chiến thắng. Thật vậy, người thứ nhất có thể dùng chiến thuật thay đổi vị trí chơi bằng bước đi đầu tiên là số 1. Với cách đi này vai trò đi đầu được thay đổi. Nếu $n = 10$ thì bước đi đầu tiên là 6, rồi sau đó đi theo các cặp $(4, 5)$, $(7, 9)$, $(8, 10)$.

Bài 2.33. Cũng sử dụng chiến thuật đổi chỗ.
Đầu tiên chọn số 6 sau đó ....

Bài 2.38.



Bài 2.45. Phủ bàn cờ bằng domino 2×1.

Bài 2.46. Kết đôi. Nếu $m \cdot n$ lẻ thì người đi đầu thắng, trái lại thì người thứ 2.
Hai ô được kết đôi nếu chung là bước đi của con mã....

Bài 2.47. a) $n = 3k$. người 2 thắng chọn theo bộ $(6, 9)$, $(7, 8)$.

b) $n = 3k + 1$ người 1 thắng. Bước đầu đi số khác 9. Các bước sau quay về chiến thuật phần trên.

c) $n = 3k + 2$. Người thắng: Bước đi đầu tiên là 9. Sau đó là thuật toán phần trên.

4 Hàm Sprague – Grundy trong trò chơi toán học.

4.1 Hàm Sprague – Grundy

Bước đi: Sự di chuyển từ vị trí này sang vị trí khác tuân thủ luật chơi gọi là bước đi (thao tác).
Thế thua, thế thắng: là những vị trí mà xuất phát từ đó người đi chắc chắn sẽ thua (thắng).
Bước tiếp theo (trực tiếp): Là bước đi trực tiếp từ vị trí X đến vị trí Y lân cận (láng giềng) của nó phù hợp luật chơi.
Trò chơi hữu hạn: là trò chơi chỉ sau một số bước đi hữu hạn thì kết thúc.

Định lý 1. *Trong trò chơi hữu hạn không tồn tại chu trình.*

Trò chơi thông dụng (bình thường). Là trò chơi mà người thắng cuộc là người thực hiện được bước đi cuối cùng.
Vị trí đứng – Thế đứng là vị trí mà người chơi chuẩn bị đi tiếp tục hoặc kết thúc cuộc chơi.
Chiến lược thắng: Là cách chơi mà nếu khi áp dụng nó đối phương hoàn toàn không có khả năng thắng (chỉ còn thua).
Định nghĩa số nhỏ nhất còn sót. Có một bộ số nguyên không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Số nhỏ nhất còn sót của bộ số này là số nhỏ nhất không xuất hiện trong các số x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Kí hiệu giá trị này là $\text{mex}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (minimal excluded).

Định nghĩa số Grundy của vị trí đang đứng. *Trong một trò chơi hữu hạn số Grundy của một vị trí đứng X hoặc bằng 0 nếu không có bước tiếp theo, hoặc tất cả các số của các bước tiếp theo của nó đều đã được ghi số, khi đó số của vị trí đó là số nhỏ nhất còn sót.*

Ví dụ: Bộ số nguyên không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các giá trị của các bước tiếp theo của vị trí X, khi đó số Grundy của X sẽ là số còn sót nhỏ nhất của bộ số này và kí hiệu giá trị này là $G(X)$.

Định lý 2. *Trong trò chơi hữu hạn mọi vị trí đều có duy nhất số Grundy của mình.*

Chứng minh. Phản chứng. Giả sử theo quy tắc của trò chơi, không còn vị trí nào có thể gán số, nhưng vẫn còn vị trí X_1 không có số. Điều này chỉ có thể nếu một vị trí tiếp theo X_2 nào đó của X_1 cũng không thể ghi được số, vì nếu không, khi đó X_1 không có số tiếp theo của mình, do đó nó được ghi số 0, vì nếu trường hợp khác thì ta đã gán cho nó số nhỏ nhất còn sót. Tiếp tục như vậy X_2 có vị trí X_3 tiếp theo mà cũng chưa được gắn số, cứ như vậy với số vị trí X_4 tiếp theo, v...v.... Bằng cách này ta nhận được dãy vô cùng các vị trí $X_1, X_2, \ldots,$ không có vị trí nào được gắn số. Điều này chỉ có thể nếu đồ thị có đường tròn, mâu thuẫn vì trò chơi của ta là hữu hạn. □

Định nghĩa 1. Số Grundy của một trò chơi hữu hạn là số Grundy của vị trí xuất phát của trò chơi đó.

Tính chất.
Số Grundy của một trò chơi hữu hạn có 3 tính chất quan trọng sau:

1) Vị trí thua có số Grundy bằng 0.

2) Nếu một vị trí có số Grundy bằng 0, thì các bước tiếp theo của nó có số Grundy khác 0, hoặc trò chơi kết thúc.

3) Nếu một vị trí có số Grundy là $n(>0)$ thì trong các số Grundy của các bước tiếp theo có tất cả các giá trị $(n-1)$, $(n-2)$, $\ldots$, 1, 0 (từ $(n-1) \to 0$).

Định lý 3. *Trong một trò chơi hữu hạn người đi đầu có chiến lược thắng trận khi và chỉ khi số Grundy của vị trí xuất phát khác* 0.

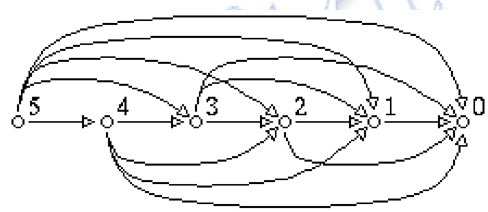
4.2 Thực hành điền các giá trị của hàm Grundy trên trò chơi

Thuật toán.
B1. Với thế đứng không còn các bước đi tiếp theo (chấm dứt cuộc chơi) ta điền số 0.
B2. Với vị trí X chưa có số Grundy, sẽ được điền số $n \geq 0$ trong trường hợp sau:

1. Nếu n là số nhỏ nhất còn sót trong các số của các vị trí tiếp sau của X.

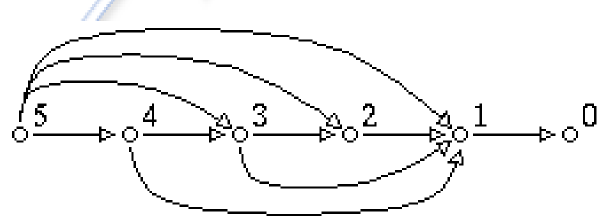
2. Nếu tất cả các bước tiếp theo chưa ghi số của X đã có vị trí tiếp theo có số Grundy n.

a) Trò chơi: Bốc sỏi.
Trên bàn có một bốc sỏi. Mỗi người khi đến lượt có thể bốc số lượng sỏi tùy thích nhưng ít nhất 1 viên (có thể bốc tất cả). Ai là người thắng cuộc?



b) Trò chơi: Nguyên tố cùng nhau.
Trên bàn đang có n viên sỏi. Mỗi lần có thể lấy k (tùy thích) viên sỏi, nếu k và n nguyên tố cùng nhau. (Chý ý: số sỏi lấy của các lần sau phải nguyên tố cùng nhau với n).

Lời giải:



Ký hiệu R_n là giá trị Grundy của trò chơi xuất phát từ n phần tử. Khi đó hai vị trí đầu tiên có giá trị là $R_0 = 0$ và $R_1 = 1$.
Với $n = 2$ thì $R_2 = 0$
Với $n = 3$ thì $R_3 = 0$
Với $n = 5$ thì có thể lấy bất kì số nào trong các số $1,\ 2,\ 3$ và 4 do đó $R_5 = s.snn(R_1, R_2, R_3, R_4) = 3$.
Bạn đọc hãy tự kiểm nghiệm khẳng định người đi đầu chỉ có chiến thuật thắng khi số sỏi khi xuất phát đầu tiên là số chẵn.
Bảng sau liệt kê giá trị của R_n với n từ $1 \to 20$).

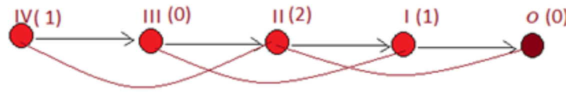
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R_n	0	1	0	2	0	3	0	4	0	2	0	5	0	6	0	2	0	7	0	8	0

c) Trò chơi: Bachet.

Trên bàn có n viên sỏi, t là một số nguyên dương cho trước. Mỗi lần đi có thể lấy ít nhất 1 viên và nhiều nhất không quá t viên sỏi. Ai lấy cuối cùng là người thắng trận.

Gợi ý.

Luôn luôn để lại trên bàn số sỏi là bội của $(t+1)$. Ai đạt được tình trạng này người đó thắng.

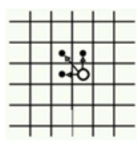


Ví dụ với 4 viên sỏi: $t = 2$. Mỗi một vị trí ta kí hiệu số sỏi (số Grundig) của vị trí đó.

d) Trò chơi: Cờ vua

Trên bàn cờ lưới ô vuông. Quân vua có thể đi chuyển sang bên trái, lên trên hay theo đường chéo, mỗi lần 1 đơn vị (ngang, thẳng hay chéo) từ góc phải bên dưới lên góc trái trên cùng. Người thắng cuộc là người đi bước cuối cùng.

Gợi ý.

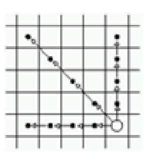


	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0
7	1	2	3	2	3	2	3	2	3
6	0	3	0	1	0	1	0	1	0
5	1	2	1	2	3	2	3	2	3
4	0	3	0	3	0	1	0	1	0
3	1	2	1	2	1	2	3	2	3
2	0	3	0	3	0	3	0	1	0
1	1	2	1	2	1	2	1	2	3
	0	3	0	3	0	3	0	3	0

e) Trò chơi: Quân Hậu

Bàn cờ lưới ô vuông. Quân Hậu có thể đi theo hướng sang ngang, lên trên hoặc theo đường chéo song song với đường chéo vẽ từ đỉnh phía trên và bên trái, với một độ dài bước đi tùy thích.

Gợi ý.

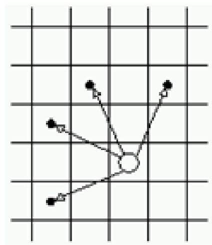


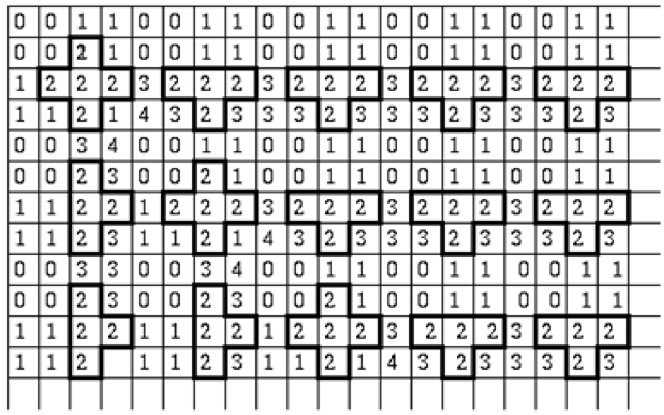
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9
2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10
3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8	7
4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13	12
5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12	14
6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0	2
7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15	13
8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16	17
9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17	6
10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14	18
11	9	10	7	12	14	2	13	17	6	18	15

f) Trò chơi: Quân mã

Quân mã có thể bước theo 4 cách như trong hình vẽ. Di chuyển từ phía dưới bên phải lên phía trên bên trái. Ai là người thắng trận?

Gợi ý:



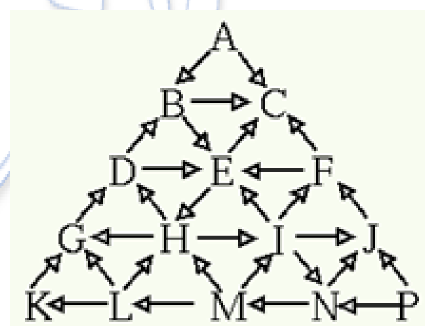


0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3
0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3
0	0	3	3	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2		1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3

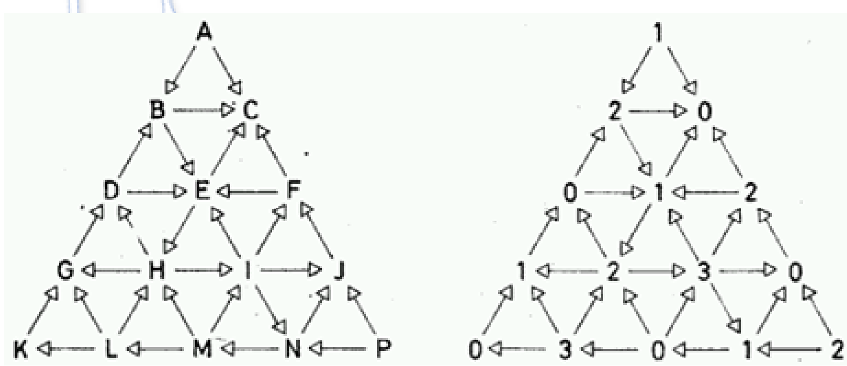
g) Trò chơi: Ùn tắc giao thông

Hình vẽ là sơ đồ giao thông một đất nước. Các thành phố được nối với nhau bằng các đường giao thông 1 chiều. Người ta thay nhau lái xe mỗi người một đoạn nối hai thành phố ví dụ từ X đến Y chẳng hạn (họ chỉ đổi tay lái cho nhau tại các thành phố). Người nào đưa ô tô đến đích trước là người thắng trận.

Ghi chú: Đây là bài toán không hữu hạn, nhưng người thứ 2 có chiến lược thắng trận.



Gợi ý:



4.3 Trò chơi tổng – Cấu trúc đại số

Định nghĩa: Trò chơi tổng của n trò chơi khác là một trò chơi hai người và cùng một lúc họ phải chơi trên n trò chơi. Mỗi bước đi người đến lượt chỉ được bước trên một trò chơi, nhưng trên trò nào thì hoàn toàn do người đó quyết định. Sau khi không còn có thể đi tiếp bất kì ở đâu thì người đi cuối cùng là người thắng trận.

Đây là trò chơi mà cùng một lúc phải quan tâm đến nhiều trò chơi gộp lại (nhưng không trộn vào nhau). Người thắng vẫn là người đi bước đi cuối cùng.
Để dễ hình dung trò chơi tổng, ta lấy ví dụ có hai trò chơi J_1 và J_2. Ký hiệu $J_1 \oplus J_2$ là trò chơi tổng của hai trò chơi này, tức là hai người đồng thời phải chơi hai trò chơi một lúc – mỗi bước đi cho trong một trò chơi. Người nào đi bước cuối cùng (kết thúc tất cả các trò chơi) thì người đó thắng. Tương tự như vậy ta có thể tổ chức các tổng $J_1 \oplus J_2 \oplus J_3$ của ba trò chơi J_1, J_2 và J_3.
Trong hệ đếm cơ số 2 chúng ta còn biết đến tổng nim của hai số được định nghĩa như một phép cộng không nhớ (tổng trực tiếp của các nhóm Abel):

$$\begin{array}{r} 1\,100\,100 \\ \oplus \quad \underline{110\,010} \\ 1\,010\,110 \end{array}$$

Trong trò chơi tổng, một số hạng của tổng có khi là một trò chơi đơn, nhưng bản thân nó cũng có thể là một tổng nào đó của một số trò chơi khác.
Đầu tiên ta xét tổng $J \oplus J$ của hai phiên bản của cùng một trò chơi J. Trong trương hợp này Người thứ nhất không thể thắng nếu người thứ 2 luôn đi tương tự với bước đi của người thứ nhất nhưng ở trò chơi kia.
Trường hợp $J \oplus J \oplus J$ tình hình phức tạp hơn một chút. Nếu trong trò chơi J, người thứ 2 có chiến thuật thắng, thì trong $J \oplus J \oplus J$ cũng thắng. Nếu trong J người đi đầu có chiến thuật thắng thì trong tổng $J \oplus J \oplus J$ cũng thắng.

Định lý 4. *Nếu trò chơi hữu hạn J có số Grundy bằng 0 thì các trò chơi $J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J$, ... có số Grundy bằng 0. Nếu trò chơi hữu hạn J có số Grundy là số dương thì các trò chơi $J \oplus J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J \oplus J$, ... (có lẻ thành phần) thì có số Grundy là số dương và các trò chơi $J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J \oplus J \oplus J$, ... (có chẵn thành phần) thì có số Grundy bằng 0.*

Định lý 5. *Gọi J_i số Grundy của trò chơi J_i. Khi đó số Grundy của trò chơi $J_1 \oplus J_2$ là tổng nim$j_1 \oplus j_2$ của J_1 và J_2.*

Định lý 6. *Số Grundy của trò chơi tổng của các trò chơi đơn giản trùng với tổng −nim của các số Grundy.*

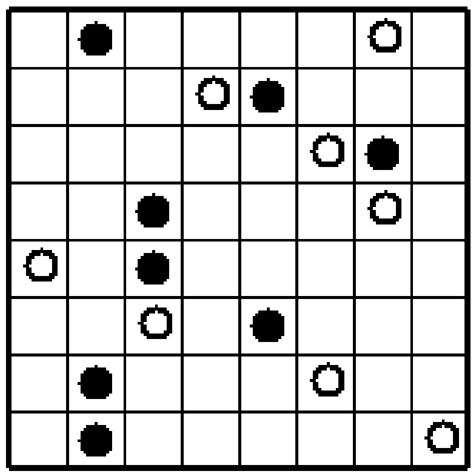
Định lý 7. *Trong một trò chơi toán học người đầu tiên có chiến lược thắng khi và chỉ khí trong các bước tiếp theo của người đó có một bước nào đó có số Grundy bằng 0.*
Người thứ hai có chiến lược thắng khi và chỉ khi số Grundy của người đầu tiên có giá trị 0.
Trong mọi trường hợp khác cả hai tuyển thủ luôn có thủ thuật không thua, tức là trò chơi sẽ không kết thúc nếu cả hai cùng biết chơi thông minh.

4.4 Trò chơi NIM và họ hàng

a) Trò chơi NIM. Có một vài bốc sỏi, mỗi bước đi từ một bốc sỏi người ta có thể lấy ít nhất 1 vài viên hoặc cả bốc. Người thắng cuộc là người lấy viên sỏi cuối cùng.

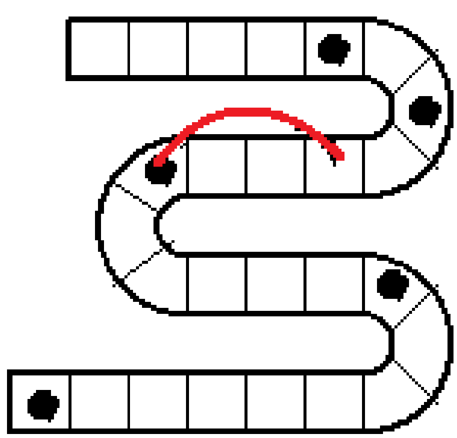
Hiển nhiên số Grundy của trò chơi là tổng Nim của các trò chơi bốc từ một nắm sỏi. Người muốn thắng thì sau mỗi bước đi cần để lại tổng nim bằng 0.

b) Trò chơi D. G. Northcott (Quân tốt). Trên bàn cờ 8×8, người ta chơi bằng 8 quân tốt đen và 8 quân tốt trắng. bắt đầu như trên hình vẽ, mỗi hàng có đúng trắng và đen mỗi loại 1 quân. Người bắt đầu sử dụng quân trắng dịch chuyển trong cùng một hàng sang trái hay sang phải số ô tùy ý nhưng không được nhảy qua đầu hoặc cùng đứng cùng ô với đối phương. Người thua là người không đi tiếp được nữa, tức là toàn bộ số quân của mình bị bao vây chặt cứng.



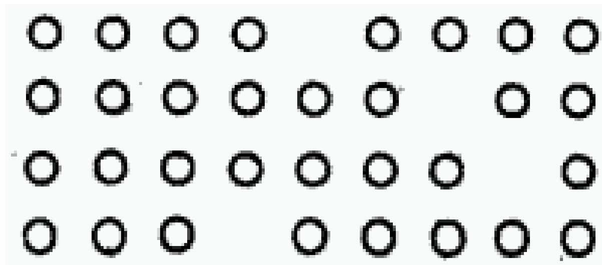
Mặc dù trò chơi không là hữu hạn, nhưng thực chất lại chính là một NIM "ẩn".
Trong trò chơi này các số sỏi trong mỗi bốc sỏi chính là số ô khoảng cách giữa 2 quân trằng và đen trên hàng đó.

c) Trò chơi Bong bóng. Ống đựng nước ngoằn nghèo được chia ra thành các ô. Người ta đặt vào một số ô các quả bong bóng, không có quả bong bóng nào ở cùng trong một ô, và các bong bóng không vượt được nhau. Mỗi lần người ta có thể cho một bong bóng nổi lên một vài ô tùy thích. Trò chơi kết thúc khi các bong bóng được xếp đuôi nhau nổi trên đỉnh ống. Người thua trận là người không đẩy được bong bóng tiếp tục lên.



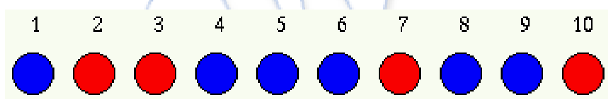
Trong trò chơi này chúng ta cũng đều tìm được NIM.

d) Tiều Phu đốn củi. Trong một cánh rừng lưới ô vuông, cây mọc ở mắt lưới, chỗ có cây, chỗ thì không có (hình vẽ). Các tiều phu (người chơi) thay nhau đốn cây (gạch chéo): người đến lượt được chọn 1 hay vài cây cùng hàng và đứng liên tiếp nhau để chặt. Người thua là người không còn cây để chặt.



Về hình thức đây là một Nim cho 8 bốc sỏi. (Cũng có thể nhân tạo thêm số bốc sỏi bằng cách chặt cây ở giữa cụm, nhưng là thực chất không gây biến đổi tổng NIM (!!!) và vì thế không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng).

e) Trò chơi LẬT XU. Có 10 miếng bìa tròn, một mặt được sơn xanh, mặt kia được sơn đỏ. Dể bắt đầu người ta xếp các tấm bìa tròn thành hàng, mặt trên là màu xanh hoặc đỏ bất kỳ. Người đến lượt có thể chọn một trong hai cách làm: hoặc chọn một tấm bìa tròn trên màu đỏ và chuyển từ đỏ lên xanh, hoặc tìm lật mặt hai tấm bìa tròn, nhưng trong số tấm bên phải (số thứ tự lớn hơn) phải chuyển từ đỏ thành xanh. Người thắng là người sau bước đi của mình thì tất cả các tấm bìa có mặt bên trên là màu xanh.



f) Trò chơi: RIM. Người ta lấy sỏi từ một vài bốc sỏi. Mỗi lần lấy người ta có thể chọn từ một bốc và lấy ra một số viên sỏi sao cho số sỏi vừa lấy nguyên tố cùng nhau với số sỏi vừa được lấy ra lần trước.

Trò chơi này tất nhiên là tổng của trò chơi NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU chúng ta đã biết. Vì thế chiến lược thắng là chiến lược TỔNG NIM.

g) Trò chơi: DIM. Người ta lấy sỏi từ một vài bốc sỏi. Khác với bài trên ở chỗ số sỏi được lấy ra là ước số của số sỏi ban đầu trong bốc sỏi nó được lấy ra.

Ta nhận thấy đây là trò chơi tổng. Trong trường hợp chỉ có một bốc sỏi số Grundig sẽ là như sau với n là số sỏi, G_n là số Grundig:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G_n	0	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3

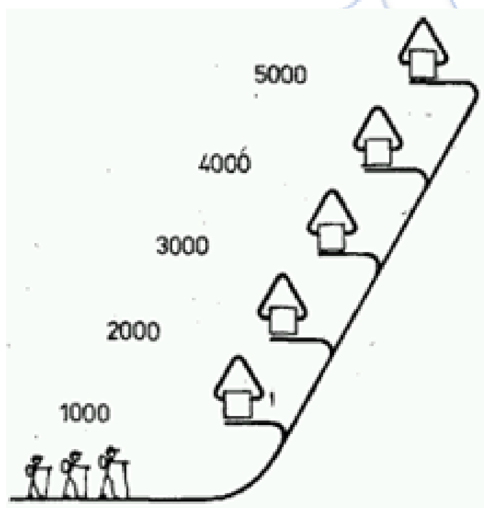
Thông thường nếu số sỏi chia hết cho 2^k, nhưng không chia hết cho $2^k + 1$, khi đó số Grundig của nó sẽ là $k + 1$.

Sau đây là trò chơi tổng hợp của các trò chơi trên.

h) Trò chơi: RIDINIM. Có 3 bốc sỏi. Mỗi bước đi người ta chỉ có thể lấy sỏi từ một bốc và

theo các nội quy sau. Ở bốc thứ nhất số sỏi được lấy ra phải nguyên tố cùng nhau với số sỏi lấy ra lần trước từ bốc sỏi này (RI), từ bốc sỏi thứ 2 số sỏi được lấy ra phải là ước số của số sỏi có trong bốc đó (DI), từ bốc thứ 3 có thể lấy bao nhiêu tùy thích (NIM).
Xuất phát từ 3 bốc, mỗi bốc 10 viên sỏi. Bốc đầu tiên có số Grundig là 0, bốc thứ hai là 2 và bốc thứ 3 là 10. Người đi đầu có chiến thuật thắng, với bước đi duy nhất đầu tiên là lấy 8 viên sỏi từ bốc sỏi thứ 3.
Ngoài trò chơi bốc sỏi ta cũng có thể tổng hợp các trò chơi khác các trò chơi cơ bản như Cầu Thang và cũng có thể chơi theo kiểu NIM.

i) Trò chơi leo núi. Cần phải đưa ba nhà thám hiểm lên một ngọn núi 5000m. Các nhà thám hiểm sức khỏe không như nhau, người thứ nhất đi 1000m thì phải nghỉ, người thứ hai đi được tối đa 2000m, người thứ ba có thể đi tối đa 3000m. Trên suốt lộ trình cứ 1000m thì có một nhà nghỉ có thể đủ chỗ cho tất cả mọi người nghỉ nếu cần. Các nhà thám hiểm có thể nghỉ sớm trước thời gian chịu đựng. Hai hướng dẫn viên tham gia trò chơi. Mỗi người mỗi lần phải đưa một người lên núi với các điều kiện sức khỏe nêu trên. Người thắng cuộc là người mang được người cuối cùng lên đỉnh núi.



Đây là trò chơi cầu thang thú vị: Thang cao 5 đơn vị. Mỗi lần có thể bước 1, 2 hoặc 3 đơn vị. Người thắng cuộc là người đưa được người cuối cùng lên đỉnh núi.

4.5 Các trò chơi khác

a) Trò chơi: Tô mầu. Cho lưới ô vuông $n \times k$. Hình vuông mẫu cạnh m $(m \leq k; n)$ hai người chơi. Đến lượt người chơi sẽ chọn sơn một hình vuông $m \leq m$ vào chỗ tùy ý nhưng không đè lên các vùng đã bị sơn (có thể tiếp xúc cạnh). Người thua là người không tiếp tục sơn được nữa. Ai có chiến lược thắng?

b) Trò chơi: Trihex. Trên hình vẽ, hai người chơi thay đổi nhau đánh dấu các vòng tròn con trên hình. Ai có trước 3 vòng tròn con thẳng hàng là người đó thắng. Hỏi ai có chiến thuật thắng? Chiến thuật như thế nào?

c) Trò chơi: Dawson's Chess. Cho một dải giấy chia ô vuông 1n. Hai người thay nhau điền kí hiệu X vào các ô vuông sao cho các ô đã bị đánh dấu X không đứng cạnh nhau. Ai là người có chiến lược thắng trận?

d) Trò chơi: Lật xu (tiếp theo). Có 10 miếng bìa tròn, một mặt được sơn xanh, mặt kia được sơn đỏ. Để bắt đầu người ta xếp các tấm bìa tròn thành hàng, mặt trên là màu xanh hoặc đỏ bất kỳ. Người đến lượt được chọn một tấm bìa tròn mặt trên màu đỏ và up mặt lại tất cả các tấm bìa đứng bên phải nó và kể cả nó. Người thua cuộc là người không chọn, không đi tiếp được. Hỏi ai có chiến lược thắng?

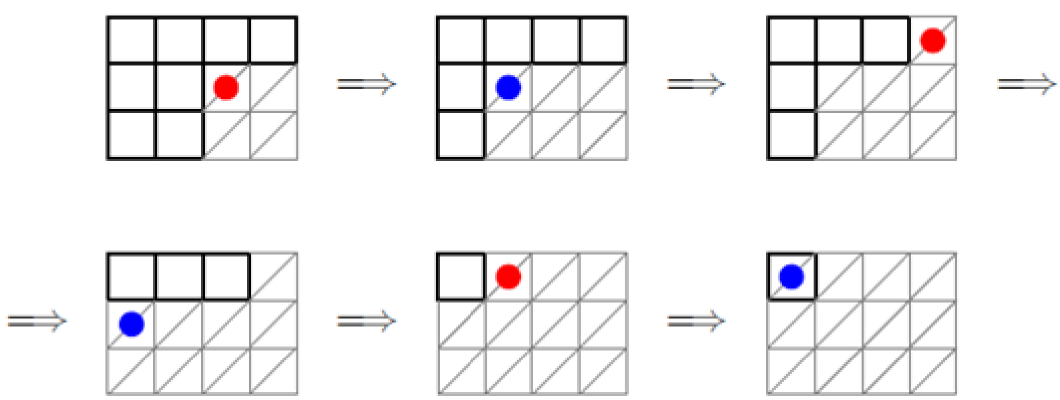
e) Trò chơi: Wythoff – Nim. Hai bốc sỏi. Hai người thay nhau lấy hoặc từ một bốc nhiều ít tùy ý thích, hoặc từ cả hai bốc số sỏi bằng nhau tùy ý. Ai lấy viên sỏi cuối cùng là người thắng. Hỏi ai có chiến thuật thắng?
Ghi chú: Trường hợp tổng quát chiến thuật thắng tương đối phức tạp.

f) Trò chơi: Fibonacci – Nim. Có một bốc n viên sỏi. Hai người chơi. Người đầu tiên có thể lấy bao nhiêu tùy ý nhưng không lấy hết cả bốc. Sau đó người tiếp theo có thể lấy không quá hai lần số sỏi người vừa đi trước lấy nhưng phải lấy ít nhất một viên. Ai là người chiến thắng?

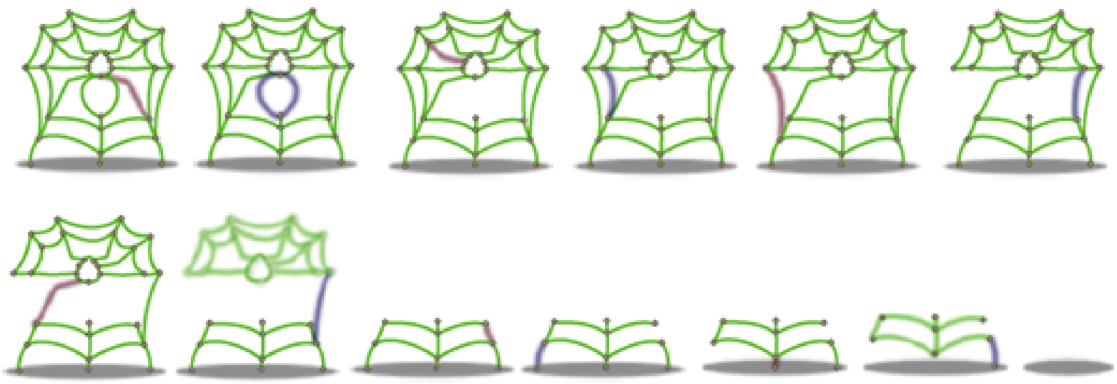
5 Một số đề tài nghiên cứu

Đề tài 1 (Thanh socola nhiễm độc)**.** Cho một thanh socola kích thước $n \times m$ có hình vuông góc trái bên trên nhiễm độc. Hai người chơi. Họ thay nhau đánh dấu một ô vuông bất kì rồi bẻ từ ô vuông đó về bên phải và xuống dưới là phần của mình. Tiếp theo người đi sau cũng làm tương tự. Người bị thua là người phải nhận hình vuông nhiễm độc.
Hãy phân tích khả năng thua thắng trong trò chơi này.

Ví dụ: Với thanh socola 3×4. Người đi đầu màu đỏ, người thứ 2 mầu xanh.



Đề tài 2 (Tỉa cây trong vườn hoa)**. Qui tắc dọn vườn.**
DEF. Vườn được tượng trưng bằng một đồ thị không hướng $G(V, E)$. Trong đó $F \subseteq V$ là tập các đỉnh sao cho F có trong mọi đồ thị thành phần của G. Quy tắc của trò chơi như sau: Những người chơi thay nhau lấy đi một cạnh của đồ thị. Nếu có một đỉnh x thỏa mãn $x \notin F$ và từ F không có đường đi dẫn vào một đỉnh nào đó thuộc F, khi đó người ta xóa ngay đỉnh x và tất cả các cạnh xuất phát từ x. Do đó với việc lấy một cạnh có thể làm nhiều cạnh và đỉnh khác bị xóa theo. Người thua là người không đi tiếp được.



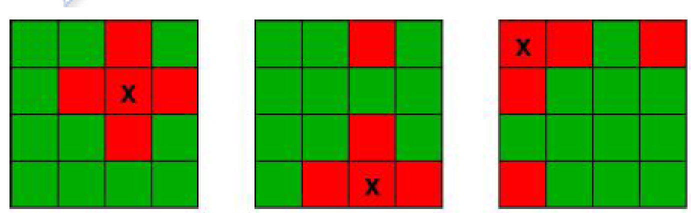
Nội dung của bài toán chính là phản ánh việc dọn cây trong vườn. Cho trước một đồ thị – vườn, một số mầm cây nảy mầm trên mặt đất. Các thành phần của vườn đều được nối với mặt đất. Mỗi bước đi người ta xóa một cạnh. Sau đó những thành phần nào trở thành không được nối với đất thì rơi rụng và vì thế sẽ bị dọn đi. Người thắng là người lấy cạnh cuối cùng.

Đề tài 3 (Trò chơi chia hết)**.** Hai người chơi. Đầu tiên họ thống nhất với nhau một số tự nhiên N. Hai người thay nhau viết lên bảng ước số của N nhưng phải tuân theo quy tắc không được ghi những số mà là ước số của một số đã được viết rồi trước đó. Người phải ghi số N là người thua.

Đề tài 4 (Trò chơi Button Madness – Một người chơi)**.** Có bảng 4×4 (tổng quát hóa $n \times m$). Trên các ô vuông có các nút bấm có thể làm chuyển màu của ô vuông và các ô bên cạnh (cùng cạnh). Mỗi bước đi được thực hiện như sau:
Người ta bấm nút trên một ô vuông chọn tùy ý, khi đó:

- Ô được bấm nút chuyển màu (đỏ $\leftrightarrow$ xanh)
- Bốn ô cùng cạnh (trên – dưới – phải – trái) đổi màu.
- Nếu ô bên cạnh nào đó bị trượt ra ngoài bảng thì ô theo vòng xuyến đổi màu.

Minh họa các ảnh hưởng màu.



Đích cần đạt được là từ một tình trạng nào đó cho trước (ví dụ tất cả là màu xanh), I đạt được tình trạng tất cả các ô có mầu đỏ trước là người thắng cuộc.