TS. Nguyễn Văn Lợi

TOÁN CÔNG NGHỆ

*

LÝ THUYẾT GRAPH

Chương trình bồi dưỡng và phát triển năng lực

ĐỒNG HÀNH CÙNG

LOISCENTER

Mục đích:

Trước 18 tuổi được trang bị kiến thức

- Khoa học Toán - Máy tính
- Kỹ năng lập trình code - hệ thống
- Toán kinh tế - MBA

Đầu tư cho tương lai – Thông minh nhất – Hiệu quả nhất

Đôi lời chia sẻ

Chỉ $10 - 20$ năm nữa khi làn sóng công nghệ 4.0 sẽ định hình lại cấu trúc cuộc sống và xã hội. Cái đói nghèo đã được trả về cho quá khứ, lúc đó lao động không còn là để tồn tại mà chủ yếu nhằm mục đích sáng tạo và tiến bộ.

Các công việc sẽ tập trung vào 4 nhóm:

– Nghệ thuật

– Khoa học kỹ thuật

– Dịch vụ

– Sức khỏe và Thể thao

Tùy thuộc khả năng, con người có thể lựa chọn các thể loại công việc phù hợp. Nhưng bất kì công việc gì yếu tố sáng tạo và thi đua sẽ được đưa lên hàng đầu.

Chúng tôi chọn công việc chuẩn bị hành trang *tri thức khoa học kỹ thuật* cho lớp công dân thời đại 4.0 làm nhiệm vụ chính của mình.

Mục lục

Ngày 11 tháng 5 năm 2019

Phần I
LÀM QUEN VỚI GRAPH – ĐỒ THỊ

1 Định nghĩa Đồ thị (graph)

1.1 Đỉnh và cạnh

Đồ thị (graph) $G = (V, E)$ là một bộ gồm các đỉnh V và các cạnh E, trong đó $V \neq \emptyset$ và mỗi cạnh nối với 2 đỉnh (không nhất thiết phân biệt).

Nếu cạnh e tương ứng với 2 đỉnh v, w thì ta nói v và w là 2 **đỉnh kề** (hay 2 đỉnh liên kết) với nhau. Ký hiệu $e = (v, w)$ hay $e = (w, v)$ (hoặc viết đơn giản hơn $e = vw$, hoặc $e = wv$ – nếu không gây hiểu nhầm). Cạnh (v, v) tương ứng với 2 đỉnh trùng nhau gọi là một **vòng** hay **Xuyến** tại v. Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh được gọi là 2 cạnh song song hay cạnh bội. Đồ thị không có cạnh song song và cũng không có vòng được gọi là **đơn đồ thị**. Ngược lại là **đa đồ thị**.

Đồ thị mà mọi cặp đỉnh của nó đều kề nhau được gọi là **đồ thị đầy đủ**. Đơn đồ thị đầy đủ bao gồm n đỉnh được ký hiệu: K_n.
Hai cạnh mà có đỉnh chung thì gọi là hai **cạnh kề**.
Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là một **đồ thị con** của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $V' \subset V$; $E' \subset E$.
Một đồ thị có thể được biểu diễn bằng liệt kê, hình học (hình vẽ), một ma trận hay một bảng số.

1.2 Bậc của đỉnh trong đồ thị

Định nghĩa 1. Đỉnh v của đồ thị G được gọi là có bậc n nếu v kề với n đỉnh khác (v là đầu mút của n cạnh). Ký hiệu: $deg(v)$ hay $d(v)$. (Ý nghĩa: *Từ một làng có bao nhiêu đường xuất phát*).

– Mỗi *vòng (khuyên)* tại v được kể là 2 cạnh tới v.

– Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập.

– Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo (pendant vertex) – (*đỉnh độc đạo*).

– Đỉnh mà được nối với tất cả các đỉnh khác thì được gọi là *đỉnh đầy đủ*.

– Cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo (pendant edge) – (*đường độc đạo*).

– Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là *đồ thị rỗng* (null graph).

Định lý 1. *Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$, tổng số bậc của các đỉnh của G bằng 2 lần số cạnh.*

Hệ quả: Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$, ta có:

1) Số các đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.

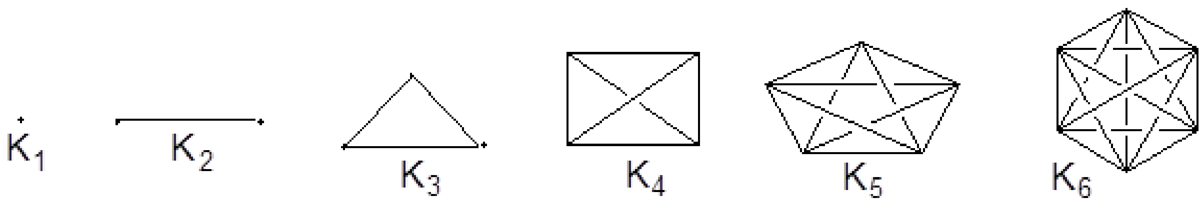
2) Tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn.

Định lý 2. *Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$, nếu $|V| \geq 2$ thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.*

Định lý 3. *Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$ có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc bậc $n - 1$.*

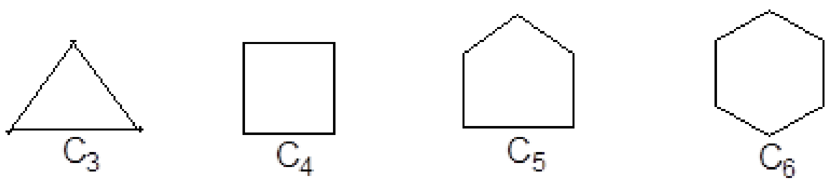
1.3 Một số đồ thị đặc biệt

a) Đồ thị đầy đủ



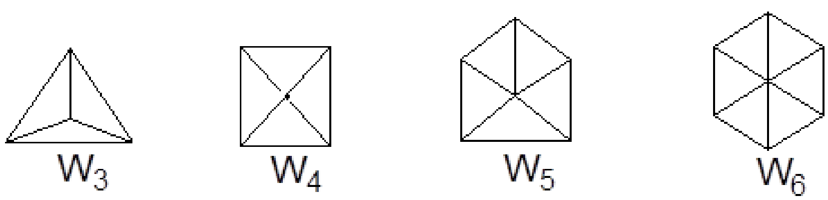
b) Đồ thị vòng (chu trình)

Định nghĩa 2. Đồ thị vòng ký hiệu: C_n, $n \geq 3$ là một đồ thị với n đỉnh v_1, v_2, ..., v_n và các cạnh v_1v_2, v_2v_3, ..., v_nv_1.



c) Đồ thị hình bánh xe

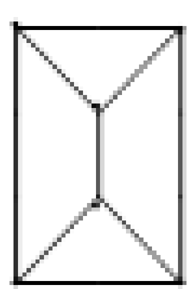
Định nghĩa 3. Nếu thêm một đỉnh vào đồ thị vòng C_n $(n \geq 3)$ và nối đỉnh này với n đỉnh của C_n thì ta được đồ thị hình bánh xe (Wheel graph), *ký hiệu:* W_n.



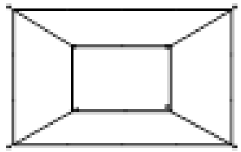
d) Đồ thị đều

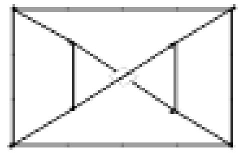
Định nghĩa 4. Một đồ thị đều (Regular graph) là đồ thị mà mọi đỉnh đều có cùng bậc. Nếu đồ thị G có các đỉnh có cùng bậc K thì được gọi là $K -$ đều.

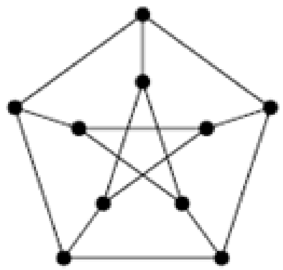
+ Đồ thị $3 -$ đều 6 đỉnh:



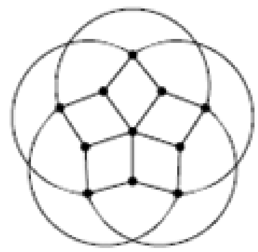
+ Đồ thị $3-$ đều 8 đỉnh:







Peterson

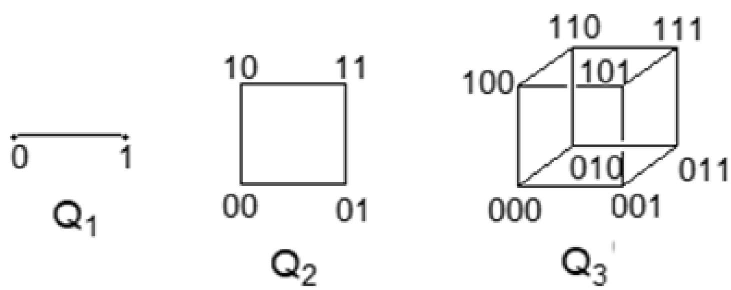


Grotzsch

e) Các khối $n-$ lập phương

Các khối $n-$ lập phương ($n-$ cube graph), ký hiệu: Q_n là các đồ thị có $2n$ đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một dãy số nhị phân với độ dài n. Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các dãy nhị phân biểu diễn chúng chỉ khác nhau đúng 1 bit.
(Dãy nhị phân độ dài n là dãy chỉ chứa n chữ số 0 và 1).

Ví dụ:

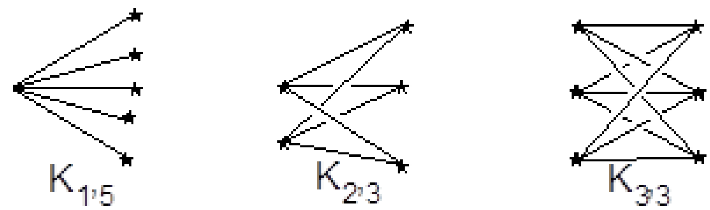


f) Đồ thị bù
Hai đơn đồ thị G và G' được gọi là bù với nhau nếu chúng có chung các đỉnh, cạnh nào thuộc G thì không thuộc G' và ngược lại. Ký hiệu: $G' = \overline{G}$.

g) Đồ thị lưỡng phân (hai phía; kết đôi)

Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân (bipartie graph hay còn gọi matching graph = đồ thị kết đôi) nếu tập hợp các đỉnh V của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng V_1 và V_2, $V1 \cap V2 = \emptyset$ sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.
Một đồ thị lưỡng phân mà mỗi đỉnh của V_1 (có m đỉnh) đều kề với mọi đỉnh của V_2 (có n đỉnh),

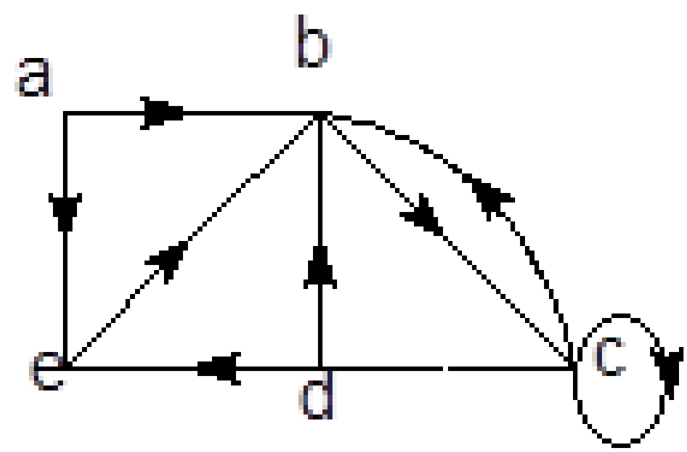
được gọi là một đồ thị lưỡng phân đầy đủ, ký hiệu: $K_{m,n}$.



2 Đồ thị có hướng (Directed graph)

2.1 Định nghĩa

Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm tập hợp các đỉnh V và tập hợp các cạnh E bao gồm các cặp sắp thứ tự các phần tử của V. Cạnh e tương ứng với một cặp thứ tự (a, b) của 2 đỉnh $a, b \in V$ được gọi là một cạnh có hướng từ a đến b. Ký hiệu: $e = \overrightarrow{ab}$, trong đó a được gọi là đỉnh đầu, b được gọi là đỉnh cuối của cạnh e. Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên (vòng) là trùng nhau.



2.2 Bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng

Định nghĩa bậc vào: Cho G là đồ thị có hướng, bậc vào của đỉnh v, ký hiệu: $deg-(v)$ (hoặc $din(v)$) là số cạnh có đỉnh cuối là v.

Định nghĩa bậc ra: Cho G là đồ thị có hướng, bậc ra của v, ký hiệu: $deg+(v)$ (hay $dout(v)$) là số cạnh có đỉnh đầu là v.

Chú ý: Một vòng tại một đỉnh sẽ góp thêm một đơn vị vào bậc vào và bậc ra của đỉnh này.

Định lý 4. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị.*

Một đồ thị có hướng được gọi là **cân bằng (balanced)** nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc vào và bậc ra bằng nhau.

3 Sự đẳng cấu của các đồ thị

Định nghĩa. Hai đồ thị hữu hạn G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu nếu các đỉnh của chúng được đánh số lần lượt từ $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ sao cho nếu từ hai đỉnh i và j có cạnh nối nhau trong G_1, thì trong G_2 hai đỉnh i và j tương ứng cũng được nối với nhau và ngược lại nếu trong G_1 không được nối thì trong G_2 cũng không.

Phát biểu dưới ngôn ngữ ánh xạ

Các đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu có một song ánh $f : V_1 \to V_2$ sao cho nếu a và b là liền kề trong V_1 thì $f(a)$ và $f(b)$ liền kề trong V_2; $\forall a, b \in V_1$. Khi đó song ánh f được gọi là một đẳng cấu.

Nói cách khác, nếu 2 đồ thị là đẳng cấu thì sẽ tồn tại một song ánh giữa các đỉnh của 2 đồ thị bảo toàn quan hệ liền kề.

4 Tính liên thông của đồ thị

4.1 Đường đi

Định nghĩa 5. Đường đi (path) có độ dài n từ v_0 đến v_n với n là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh liên tiếp $v_0v_1,\ v_1v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}v_n$. Đỉnh v_0 được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v_n được gọi là đỉnh cuối. Đường đi này thường được viết gọn: $v_0v_1v_2 \ldots v_{n-1}v_n$. Khi chỉ cần nêu ra đỉnh đầu v_0 và đỉnh cuối v_n của đường đi, ta viết: đường đi $v_0 - v_n$.

Một đường đi không qua cạnh nào lần thứ hai được gọi là **đường đi đơn giản (đường đi đơn)**.

Một đường đi không qua đỉnh nào lần thứ hai được gọi là **đường đi sơ cấp**.

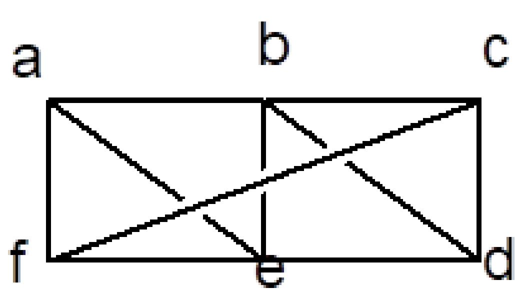
Lưu ý: Một đường đi sơ cấp là một đường đi đơn giản nhưng một đường đi đơn giản có thể không là đường đi sơ cấp).

4.2 Chu trình

Định nghĩa 6. Một đường đi khép kín (đỉnh đầu $\equiv$ đỉnh cuối) và có độ dài $n \geq 3$ được gọi là một chu trình (Cycle).

Chu trình không đi qua cạnh nào lần thứ hai được gọi là chu trình đơn giản.

Chu trình không đi qua đỉnh nào lần thứ hai, trừ đỉnh đầu $\equiv$ đỉnh cuối, được gọi là một chu trình sơ cấp.



Định lý 5. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $|V| \geq 3$ và với mọi $v \in V$ có $d(v) \geq 2$ thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp.*

Định lý 6. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $|V| \geq 4$ và với mọi $v \in V$ có $d(v) \geq 3$ thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn.*

4.3 Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

Định nghĩa 7. Một đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông* nếu có đường đi giữa các đỉnh.

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và $v \in V$ với V' là tập hợp các đỉnh của V liên thông với v, E' là tập hợp các cạnh nối 2 đỉnh của V'. Khi đó đồ thị $G' = (V', E')$ gọi là thành phần liên thông (connected component) của G chứa v. Đương nhiên nếu v và u liên thông trong G thì thành phần liên thông của G chứa v cũng là thành phần liên thông chứa u.
Ví dụ. Đồ thị có 3 thành phần liên thông.

Định lý 7. *Đồ thị $G = (V, E)$ là liên thông khi và chỉ khi G có duy nhất một thành phần liên thông.*

4.4 Đỉnh cắt và cầu

Đỉnh cắt: Nếu việc xóa đi một đỉnh $v \in V$ và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra một đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị xuất phát. Các đỉnh v như thế được gọi là đỉnh cắt (cut point) hay điểm khớp.
Hay nói cách khác, nếu thiếu nhưng điểm này. Đồ thị bị phân chia thành các đồ thị con (khác rỗng) không liên thông với nhau.
Cầu: Nếu trong đồ thị G ta bỏ đi cạnh e sẽ tạo ra nhiều thành phần liên thông hơn G thì e được gọi là cầu (brìdge). Vai trò của cầu cũng tương tự như của đỉnh cắt, khi thiếu nó sự liên thông bi phá vỡ, đồ thi bi phân chia thành các đồ thị con rời nhau.

Định lý 8. *Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$ có ít nhất $n = 2$ đỉnh $|V| = n \geq 2$. Nếu $\forall v_1, v_2 \in V$ thỏa mãn $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ thì G là đồ thị liên thông.*

Hệ quả 1. Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh, nếu mọi đỉnh $v \in V$ có $d(v) \geq \frac{n}{2}$ thì G là đồ thị liên thông.

4.5 Tính liên thông trong đồ thị có hướng

Định nghĩa *liên thông mạnh (Strongly connected).* Đồ thị có hướng G được gọi là *liên thông mạnh* nếu có đường đi từ a đến b và từ b đến a $\forall a, b \in$ đồ thị.

Định nghĩa *liên thông yếu (Weakly connected).* Đồ thị có hướng G được gọi là *liên thông yếu* nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.
Đồ thị có hướng G được gọi là *đầy đủ* nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ.

Định lý 9. *Nếu trong đồ thị $G = (V, E)$ có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông với nhau.*

Định lý 10 (Định lý về điều kiện cần và đủ của một đồ thị lưỡng phân)**.** *Đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có độ dài chẵn.*

5 Một số phép biến đổi đồ thị

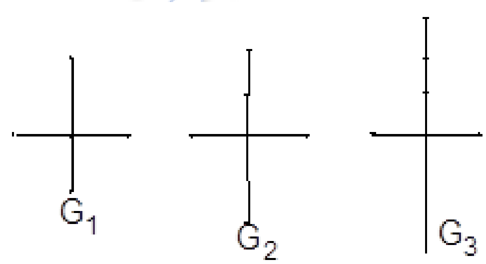
5.1 Hợp của hai đồ thị

Hợp của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị $G = (V, E)$ có tập hợp các đỉnh là $V = V_1 \cup V_2$ và tập hợp các cạnh là $E = E_1 \cup E_2$.
Ký hiệu: $G = G_1 \cup G_2$.

5.2 Phép phân chia sơ cấp

Cho đồ thị $G = (V, E)$, nếu ta bỏ đi một cạnh $e = uv$ của G và thêm vào một đỉnh mới w cùng với 2 cạnh uw và wv thì phép toán trên được gọi là phép phân chia sơ cấp.
Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là đồng phôi (homeomorphic) nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp.

Ví dụ:



G_2 và G_3 là đồng phôi vì cùng nhận được từ G_1. Rõ ràng G_2 và G_3 không đẳng cấu với nhau.

Phần II
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ II

6 Đường đi chu trình

6.1 Chu trình và đường đi Euler trong đồ thị vô hướng

a) Định nghĩa

Chu trình Euler

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị liên thông. Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler. Đồ thị có chứa một chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler.

Đường đi Euler

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị liên thông. Đường đi Euler trong G là đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G.

Định lý 11. *Một đa đồ thị liên thông $G = (V, E)$ có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.*

b) Thuật toán Fleury tìm chu trình Euler

Để tìm một chu trình Euler trong một đa đồ thị có tất cả các đỉnh đều bậc chẵn, ta có thể sử dụng thuật toán Fleury như sau: Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của đồ thị G và tuân theo hai quy tắc sau:

- *Quy tắc 1:* Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xóa cạnh đó đi, sau đó xóa đỉnh cô lập (nếu có).
- *Quy tắc 2:* Không bao giờ đi qua một cầu, trừ khi không còn cách đi nào khác để di chuyển.

Định lý 12 (Về đường đi Euler)**.** *Đa đồ thị liên thông $G = (V, E)$ có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.*

6.2 Chu trình và đường đi Euler đối với đồ thị có hướng

Định lý 13 (Về chu trình Euler)**.** *Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có chứa một chu trình Euler khi và chỉ khi G là liên thông yếu, đồng thời bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh là bằng nhau.*

Định lý 14 (Về đường đi Euler)**.** *Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị có hướng. G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler $\Leftrightarrow$ G là liên thông yếu, đồng thời bậc vào và bậc ra của các đỉnh là bằng nhau, trừ 2 đỉnh, một đỉnh có bậc vào lớn hơn bậc ra một đơn vị, còn đỉnh kia có bậc vào nhỏ hơn bậc ra một đơn vị.*

6.3 Chu trình và đường đi Hamilton

Định nghĩa 8. Một chu trình sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần) được gọi là chu trình Hamilton. Đồ thị $G = (V, E)$ có chứa chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton.

a) Điều kiện đủ để tồn tại chu trình Hamilton

Định lý 15 (Ore 1960)**.** *Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị liên thông với n đỉnh ($n \geq 3$) và nếu: $deg(v) + deg(w) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không liền kề v, w trong G. Khi đó G có chu trình Hamilton.*

Hệ quả. *(Định lý Dirac, 1952)* Nếu đơn đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh ($n \geq 3$) và $deg(v) > \frac{n}{2}; \forall v \in V$ thì G có chu trình Hamilton.

Định lý 16 (Pósa về chu trình Hamilton)**.** *$G = (V, E)$ là một đơn đồ thị có $\|V\| = n \geq 3$. Giả sử rằng với mỗi số $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ta có không quá $k - 1$ đỉnh có bậc không lớn hơn k, và trong trường hợp n là số lẻ ta có không quá $\frac{n-1}{2}$ đỉnh có bậc không vượt quá $\frac{n-1}{2}$. Khi đó đồ thị G có một chu trình Hamilton.*

b) Phương pháp tìm chu trình Hamilton
Cho một đồ thị $G = (V, E)$. Để tìm một chu trình Hamilton trong đồ thị G, ta thực hiện theo 4 quy tắc sau:
➢ *Quy tắc 1:* Nếu tồn tại một đỉnh v của G có thì đồ thị G không có chu trình Hamilton.
➢ *Quy tắc 2:* Nếu đỉnh v có bậc là 2 ($d(v) = 2$) thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton.
➢ *Quy tắc 3:* Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.
➢ *Quy tắc 4:* Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.

c) Đường đi Hamilton

Định nghĩa 9. Đường đi sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần) được gọi là đường đi Hamilton.

Định lý 17 (König)**.** *Mọi đồ thị $G = (V, E)$ có hướng đầy đủ (đồ thị vô hướng tương ứng của G là đầy đủ) đều có đường Hamilton.*

6.4 Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài toán đặt ra là *tìm chu trình ngắn nhất từ thành phố này đến thành phố khác*. Hay nói theo ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị: *ta cần tìm đường đi có tổng trọng số (ngắn) nhỏ nhất từ đỉnh này đến một đỉnh khác của đồ thị.*

Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất
Cụ thể của thuật toán Dijkstra như sau:

– Gán cho đỉnh a nhãn bằng 0; còn các đỉnh khác bằng ∞. Ta ký hiệu: $Lo(a) = 0;\ Lo(v) = \infty; \forall v \neq a$ (đây là bước lặp thứ 0).

– Gọi Sk là tập đặc biệt các đỉnh sau bước lặp thứ k của thủ tục gán nhãn. Chúng ta bắt đầu bằng $So = \emptyset$. Tập Sk được tạo thành từ Sk_{-1} bằng cách thêm vào đỉnh $u \notin Sk_{-1}$ mà có nhãn nhỏ nhất.

– Sau khi đỉnh u được ghép vào Sk, ta sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc Sk sao cho $Lk(v)$ (nhãn của đỉnh v tại bước k) là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến v mà đường đi này chỉ chứa các đỉnh thuộc Sk (tức là các đỉnh đã thuộc tập đặc biệt cùng với đỉnh u).

Giả sử v là một đỉnh không thuộc Sk. Để sửa nhãn của v, ta chọn $Lk(v)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến v và chỉ chứa các đỉnh thuộc Sk. Để ý rằng đường đi ngắn nhất từ a đến v chỉ chứa các phần tử của Sk hoặc là đường đi ngắn nhất từ a đến v chỉ chứa các phần tử của Sk_{-1} hoặc là đường đi ngắn nhất từ a đến u trong bước $(k-1)$ cộng với độ dài cạnh uv. Tức là:

$$Lk(a,v) = min\{Lk_{-1}(a,v);\ Lk_{-1}(a,u) + w(uv)\}$$

Thủ tục này được lặp bằng cách liên tiếp thêm các đỉnh vào tập đặc biệt các đỉnh cho tới khi đạt tới đỉnh z. Khi thêm z vào tập đặc biệt các đỉnh thì nhãn của nó bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến z.

Định lý 18. *Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trong đơn đồ thị liên thông, có trọng số.*

7 Đồ thị phẳng

Định nghĩa 10. Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau ở điểm không phải là điểm mút của mỗi cạnh. Hình vẽ như vậy được gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

7.1 Công thức Euler

Định lý 19 (Công thức Euler về đồ thị phẳng − liên thông)**.** *Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh. Gọi r là số miền (regions) trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó: $r = e - v + 2$ hay $v - e + r = 2$.*

Hệ quả. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh; $v \geq 3$. Khi đó: $e \leq 3v - 6$.
Hệ quả. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh; $v \geq 3$ và không có chu trình độ dài 3. Khi đó $e \leq 2v - 4$.
Hệ quả. Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh thì G phải có ít nhất một đỉnh w có $d(v) \leq 5$.

Định lý 20 (Công thức Euler về đồ thị phẳng bất kỳ)**.** *Cho G là một đơn đồ thị phẳng với e cạnh, v đỉnh và có $k \geq 1$ thành phần liên thông. Gọi r là số miền (regions) trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó:*

$$v - e + r = k + 1$$

Đây chính là công thức Euler cho một đồ thị phẳng bất kỳ.

7.2 Điều kiện cần và đủ đề đồ thị là phẳng

Nhắc lại phép phân chia sơ cấp của đồ thị: Cho G là một đồ thị, nếu bỏ đi cạnh ab của G và thêm vào đỉnh mới c cùng với 2 cạnh ac và cb. Phép toán đó gọi là phép phân chia sơ cấp. Hai

đồ thị nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp được gọi là đồng phôi với nhau.
Dễ thấy, nếu G_1 và G_2 là hai đồ thị đồng phôi thì: G_1 phẳng $\Leftrightarrow G_2$ phẳng.

Định lý 21 (Kuratowski)**.** *Đồ thị G là không phẳng khi và chỉ khi G chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.*

8 Bài toán tô màu đồ thị

8.1 Tô màu đồ thị (đỉnh)

a) Định nghĩa (tô mầu đỉnh)

➢ Tô màu một đơn đồ thị là việc gán màu cho các đỉnh của nó sao cho hai đỉnh liền kề có màu khác nhau. Mỗi đồ thị có thể có nhiều cách tô màu khác nhau.
➢ Số màu hay sắc số (Chromatic number) của một đồ thị G là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu G. Ký hiệu: $\chi(G)$.

b) Các định lý

Định lý 22. *Mọi đơn đồ thị đầy đủ K_n đều có: $\chi(K_n) = n$.*

Định nghĩa 11. *Klikk* của một đồ thị là một đồ thị con đầy đủ của G. Ta kí hiệu $\omega(G)$ là số đỉnh lớn nhất của các *Klikk* của G.

Định lý 23. *Mọi chu trình độ dài lẻ đều có sắc số là 3.*

Định lý 24. *Nếu G có chứa một đồ thị con đẳng cấu với K_n thì $\chi(G) \geq n$.*

Chú ý:
➢ Nếu G' là một đồ thị con của G thì $\chi(G) \geq \chi(G')$.
➢ Nếu dùng k màu để tô màu G thì không cần quan tâm đến những đỉnh có bậc nhỏ hơn k.

Định lý 25. *Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ có thể tô bằng 2 màu khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.*

Ký hiệu. Cho đồ thị G. Kí hiệu $\Delta(G)$ giá trị lớn nhất của các bậc của các đỉnh trong đồ thị.

Định lý 26. *Cho đồ thị G bất kì. Khi đó $\chi(G) \leq \chi(G) + 1$.*

Định lý 27 (Brooks)**.** *Trong một đồ thị không đầy đủ và không là chu trình lẻ, $\chi(G) \leq \Delta(G)$ thỏa mãn.*

c) Kiến tạo và định lý của Mycielski

Kiến tạo.
Quy nạp. Giả sử $G(V, E)$ đã thỏa mãn điều kiện nêu ở trên và với các đỉnh $V(G_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ta cho tương ứng đồ thị được ký hiệu là $M(G_k)$ là đồ thị chứa G. Ta sẽ xây dựng G_{k+1}. Cùng các đỉnh $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ta lấy thêm $(n+1)$ đỉnh khác nữa sao cho với mỗi v_i có tương ứng một đỉnh u_i mà các láng giềng của nó chính là các láng giềng của v_i. Đỉnh thứ $(n+1)$ được nối với mỗi đỉnh u_i khác nhưng không nối với một đỉnh v_i nào.

Định lý 28. *Với mọi số nguyên $K \geq 2$ tồn tại đồ thị G_k sao cho $\omega(G) = 2$ và $\chi(G_k) = k$.*

Ghi chú: Sử dụng mô hình Mycielski trong chứng minh.

d) Định lý bốn mầu.

Định lý 29 (Định lý bốn màu – định lý Appel-Haken, 1976). *Mọi đồ thị phẳng đều có sắc số không lớn hơn 4.*

Định lý này là định lý đầu tiên được chứng minh với sự hỗ trợ của máy vi tính.

Thuật toán Welch-Powell về tô màu đồ thị
Để tô màu một đồ thị G, ta có thể sử dụng thuật toán Welch-Powell như sau:
➢ Sắp xếp các đỉnh G theo bậc giảm dần.
➢ Dùng một màu để tô đỉnh đầu tiên và cũng dùng màu này để tô màu các đỉnh liên tiếp trong danh sách mà không kề với đỉnh đầu tiên.
➢ Bắt đầu trở lại đầu danh sách, tô màu thứ hai cho đỉnh chưa được tô và lập lại quá trình trên cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu.
➢ **Chú ý:** Thuật toán Welch-Powell chưa cho ta sắc số của một đồ thị G, nó chỉ giúp ta một cách tiếp cận để tìm sắc số của một đồ thị. Để tìm sắc số của một đồ thị thì sau khi tô màu xong ta phải sử dụng các định lý, các tính chất đã học của lý thuyết đồ thị để khẳng định số màu được dùng là ít nhất và từ đó suy ra sắc số của đồ thị. Bài toán tìm sắc số của một đô thị là một bài toán khó và không phải đồ thị nào cũng tìm được sắc số của nó một cách dễ dàng.

8.2 Tô mầu cạnh

Định nghĩa 12. Các cạnh của một đồ thị G có thể sơn bằng k màu nếu mỗi cạnh đều được sơn bằng một trong các màu đã cho và các cạnh liền nhau có màu khác nhau. Giá trị k nhỏ nhất để đồ thị G có thể sơn – cạnh bằng k màu gọi là sắc số – cạnh của G và kí hiệu $\chi_e(G)$.

Định lý 30. *Với mọi đồ thị* $\Delta(G) \le \chi_e(G)$.

Định lý 31 (Vizing). $\chi_e(G) \le \Delta(G) + 1$ *với mọi đơn đồ thị* G.

Định lý về sắc số – cạnh của đồ thị hai phía (Địnhlý Konig).

Định lý 32. *Nếu G là đồ thị hai phía khi đó* $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

Đồ thị hoàn hảo

Định nghĩa 13. Một đồ thị G được gọi là hoàn hảo nếu $\chi(G) = \Delta(G)$ và $\chi_e(G') = \Delta(G')$ với mọi đồ thị khung G' của G.

Định lý 33. *Mọi đồ thị hai phía là hoàn hảo.*

Định lý mạnh của đồ thị hoàn hảo

Định lý 34. *Một đồ thị G là hoàn hảo khi và chỉ khi G và G – phần bù của G không chứa đồ thị khung là chu trình lẻ.*

Định lý 35 (Lovasz). *Đồ thi G hoàn hảo nếu phần bù $\overline{G}$ của nó hoàn hảo.*

Tính hoàn hảo của các Đồ thị – Đoạn thẳng

Định nghĩa 14. Cho $I_1 = [a_1, b_1]$; $I_2 = [a_2, b_2]$; ..... là các đoạn thẳng đóng, hữu hạn với a_i, b_i là các số nguyên. Cho p_1, p_2, ... là các đỉnh của một đồ thị G, $\{p_i, p_j\}$ (p_i, p_j được nối với nhau trong G) nếu $I_i \cap I_j \neq 0$. Những đồ thị được tạo thành như vậy gọi là đồ thị của các đoạn thẳng hay đồ thị đoạn thẳng.

Định lý 36. *Tất cả các đồ thị đoạn thẳng là hoàn hảo.*

9 Một số khái niệm cơ bản về cây

9.1 Cây (Tree), Rừng (Forest)

a) Mở đầu

Định nghĩa 15. Cây là một đồ thị vô hướng, liên thông và không có chu trình sơ cấp.

Do cây không có chu trình sơ cấp, nên cây không thể có cạnh bội và khuyên. Vậy mọi cây là đơn đồ thị.

Định nghĩa 16. Rừng là đồ thị vô hướng không có chu trình.

Từ định nghĩa, ta thấy rừng là một đồ thị có nhiều thành phần liên thông mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

Định lý 37 (Về điều kiện đủ của cây)**.** *Nếu trong đồ thị vô hướng G, mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất thì G là một cây.*

b) Một số khái niệm về cây có gốc

Định nghĩa 17. Trong một cây, nếu ta chọn một đỉnh đặc biệt gọi là gốc của cây và định hướng các cạnh trên cây từ gốc đi ra thì ta được một đồ thị có hướng gọi là cây có gốc.

➢ **Chú ý:** Cùng một cây, nếu ta chọn gốc khác nhau thì cây có gốc thu được sẽ khác nhau.

Cho T là một cây có gốc, v là một đỉnh khác gốc của T.
➢ Cha của v là đỉnh $u \in T$ sao cho có một cạnh có hướng duy nhất từ $u \to v$. Khi đó, u được gọi là cha của v; v là con của u.
➢ Các đỉnh có cùng cha được gọi là anh em.
➢ Tổ tiên của một đỉnh khác gốc là các đỉnh trên đường đi từ gốc đến đỉnh đó.
➢ Con cháu của v là các đỉnh có v là tổ tiên.
➢ Các đỉnh của cây không có con được gọi là lá.
➢ Các đỉnh có con được gọi là đỉnh trong.
➢ Trong một cây, cho a là một đỉnh. Cây con với gốc a là đồ thì con của cây đang xét, bao gồm a và các con cháu của nó cùng tất cả các cạnh liên thuộc với các con cháu của a.
➢ Mức của một đỉnh v trong một cây có gốc T là khoảng cách từ gốc đến v.
➢ Mức lớn nhất của một đỉnh bất kỳ trong cây gọi là chiều cao của cây.

c) Định lý Daisy Chain

Định lý 38. *Giả sử T là một đồ thị có n đỉnh. Khi đó, 6 mệnh đề sau là tương đương:*

1) T là một cây.

2) T không có chu trình và có $n-1$ cạnh.

3) T là một đồ thị liên thông và nếu hủy bất kỳ một cạnh nào của nó cũng làm mất tính liên thông.

4) Giữa 2 đỉnh bất kỳ của T, luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất nối 2 đỉnh này.

5) T không có chu trình và nếu thêm một cạnh mới nối 2 đỉnh bất kỳ của T thì sẽ tạo ra một chu trình.

6) T liên thông và có $n-1$ cạnh.

Định nghĩa 18 (Cây $m-$ phân)**.** *Cây có gốc được gọi là cây $m-$ phân nếu tất cả các đỉnh trong của nó không có hơn m con. Cây được gọi là $m-$ phân đầy đủ nếu mọi đỉnh trong của nó có đúng m con.*

Cây $2-$ phân được gọi là cây nhị phân.

d) Một số tính chất của cây

Tính chất 1. Nếu T là một cây có n đỉnh $(n \geq 2)$ thì T phải có ít nhất 2 đỉnh treo.

Tính chất 2. Cây $m-$ phân đầy đủ với i đỉnh trong sẽ có tất cả $n = m \cdot i + 1$ đỉnh.

Tính chất 3. Cho T là cây $m-$ phân đầy đủ có i là số các đỉnh trong và l là số các lá của đỉnh này. Ta có:

1) Nếu T có n đỉnh thì $i = \dfrac{n-1}{m}$; $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$

2) T có i đỉnh trong thì $n = m \cdot i + 1$; $l = (m-1)i + 1$

3) T có l lá thì $n = m \cdot i + 1$ và $n = l + i$.

9.2 Cây nhị phân và phép duyệt cây

Định nghĩa 19. Duyệt cây là đưa ra một danh sách liệt kê tất cả các đỉnh của cây, mỗi đỉnh một lần. Có 3 phép duyệt cây thường dùng là duyệt tiền tự (PreOrder), duyệt trung tự (InOrder) và duyệt hậu tự (PostOrder). Cả ba phương pháp duyệt trên đều được định nghĩa đệ quy đối với cây nhị phân (mỗi nút có tối đa 2 con lần lượt được gọi là con trái và con phải của nút).

Định nghĩa 20 (Phép duyệt tiền tự (PreOrder))**.**

1) Duyệt nút gốc.

2) Duyệt con trái theo phương pháp duyệt tiền tự.

3) Duyệt con phải theo phương pháp duyệt tiền tự.

Định nghĩa 21 (Phép duyệt trung tự (InOrder))**.**

1) Duyệt con trái theo phương pháp duyệt trung tự.

2) Duyệt nút gốc.

3) Duyệt con phải theo phương pháp duyệt trung tự.

Định nghĩa 22 (Phép duyệt hậu tự (PostOrder))**.**

1) Duyệt con trái theo phương pháp duyệt hậu tự.

2) Duyệt con phải theo phương pháp duyệt hậu tự.

3) Duyệt nút gốc.

9.3 Ký pháp nghịch đảo Ba Lan (Reverse Polish Notation – RPN)

Cây biểu thức số học
Cây biểu thức số học là một cây nhị phân, trong đó:

+ Mỗi nút trong biểu diễn cho một toán tử 2 ngôi θ.

+ Mỗi nút lá biểu diễn cho một toán hạng của biểu thức.

Nếu nút trong biểu diễn cho toán tử 2 ngôi θ và có 2 con:

+ Con trái biểu diễn cho biểu thức E_1,

+ Con phải biểu diễn cho biểu thức E_2,

khi đó nút trong này biểu diễn cho biểu thức số học $E_1 \ \theta \ E_2$.

9.4 Cây khung

a) Mở đầu
Cho G là một đơn đồ thị. Một cây được gọi là cây khung của G nếu nó là một đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh của G.

Định lý 39. *Một đơn đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó có cây khung.*

Định nghĩa 23 (Cây khung bé nhất)**.** Cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông, có trọng số là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.

b) Thuật toán Prim
Thuật toán Prim được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1957. Thuật toán Prim được dùng để tìm cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông có trọng số.
Thuật toán Prim bắt đầu bằng việc chọn một cạnh bất kỳ có trọng số nhỏ nhất, đặt nó vào cây khung. Sau đó, lần lượt ghép vào cây các cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với một đỉnh của cây và không tạo ra chu trình trong cây. Thuật toán dừng lại khi $(n-1)$ cạnh được ghép vào cây.
➤ **Chú ý:** Có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất ứng với một đồ thị liên thông và có trọng số.

c) Thuật toán Kruskal

Để tìm cây khung nhỏ nhất của một đơn đồ thị liên thông có trọng số. Ta còn có thể dùng thuật toán Kruskal.

Để thực hiện thuật toán Kruskal, ta xuất phát từ việc chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất của đồ thị. Sau đó lần lượt ghép thêm vào các cạnh có trọng số tối thiểu và không tạo thành chu trình với các cạnh đã được chọn. Thuật toán dừng lại khi $(n-1)$ cạnh được chọn.

➢ **Sự khác nhau giữa thuật toán Prim và thuật toán Kruskal.**

– Trong thuật toán Prim, ta chọn các cạnh có trọng số nhỏ nhất, liên thông với các đỉnh đã thuộc cây và không tạo ra chu trình.

– Trong thuật toán Kruskal, ta chọn các cạnh có trọng số tối thiểu mà không nhất thiết phải liên thuộc với các đỉnh của cây và không tạo ra chu trình.

Phần III
Lý Thuyết Đồ Thị III

10 Định lý Hall và các định lý liên quan

10.1 Đồ thị hai phía (lưỡng phân)

Định nghĩa 24. Một đồ thị G là đồ thị *hai phía* nếu các đỉnh của G được chia thành hai tập hợp A và B, sao cho các cạnh của G nối các đỉnh của A với các đỉnh của B.
Kí hiệu: $G(A,\ B,\ E)$.

Mối quan hệ với các chu trình lẻ.

Định lý 40. *Một đồ thị là hai phía khi và chỉ khi không chứa chu trình lẻ.*

10.2 Kết đôi trong đồ thị hai phía

Định nghĩa 25. Trong một đơn đồ thị một tập hợp các cạnh được gọi là *kết đôi* nếu chúng không có đỉnh chung. Những cạnh như vậy được gọi là *cạnh độc lập*.

Định nghĩa 26. Nếu kết đôi M phủ kín tất cả các đỉnh của G, thì ta gọi M là **kết đôi toàn phần**.

10.3 Phương pháp đường đi cải thiện (cải tiến)

Công dụng của phương pháp này là kiểm tra một kết đôi đã cực đại (maximal) chưa và nếu chưa thì có thể nâng tiếp ra sao.
$G(A, B, E)$ là đồ thị hai phía cho trước, trong đó đã có một kết đôi M. Minh họa các cạnh trong M là các đường nối liên tục, các cạnh khác là đường đứt đoạn (chấm chấm). Nếu xuất phát từ một đỉnh A chưa bị phủ bởi kết đôi M có thể đi đến đỉnh B cũng chưa bị phủ bằng đường đi qua các cạnh đứt quãng rồi liên tục thay đổi nhau lần lượt, khi đó ta mở rộng được kết đôi bằng cách chuyển các cạnh trên đường đi này từ đứt đoạn sang liên tục và từ liên tục sang đứt đoạn. Nếu không tìm thấy đường đi sửa chữa thì kết đôi đó là cực đại (maximal).

Định nghĩa 27. Tập các đỉnh lân cận của $X \in V(G)$ kí hiệu là $N(X)$.

Ghi chú: $N(X)$ là tập các đỉnh y được nối bởi một cạnh một đầu là y và đầu kia là một đỉnh thuộc X.

Định lý 41 (Hall)**.** *Một đồ thị hai phía $G(A, B, E)$ có kết đôi phủ kín tập A khi và chỉ khi $|N(X)| \geq |X|$ với mọi tập con $X \subseteq A$ (điều kiện này được gọi là* ***điều kiện Hall****).*

Định lý 42 (Frobenius)**.** *Một đồ thị hai phía $G(A, B, E)$ có kết đôi hoàn toàn A khi và chỉ khi $|A| = |B|$ và $|N(X)| \geq |X|$ với mọi tập con $X \subseteq A$.*

11 Các định lý Konig, Tutte, Gallai

11.1 Định lí Konig

Định nghĩa 28. Kí hiệu $\nu(G)$ là số cạnh *độc lập cực đại* có thể tìm thấy trong đồ thị G.

Định nghĩa 29. Tập $X \subseteq V(G)$ được gọi là tập đỉnh chốt chặn, nếu các cạnh của G có ít nhất một đầu nằm trong X. Giá trị *cực tiểu* của số các đỉnh chốt chặn trong G được kí hiệu là $\tau(G)$.

Định nghĩa 30. Tập $Y \subseteq E(G)$ được gọi là tập cạnh phủ, nếu các đỉnh của G đều bị phủ bởi Y (là đầu của ít nhất một cạnh thuộc Y). Giá trị *cực tiểu* của số các cạnh phủ trong G được kí hiệu là $\rho(G)$.

Tập $X \subseteq V(G)$ được gọi là tập đỉnh độc lập, nếu X không chứa các đỉnh lân cận. Giá trị cực đại của số các đỉnh độc lập trong G được kí hiệu là $\alpha(G)$.

Định lý 43 (Konig)**.** *Nếu $G(A, B, E)$ là đồ thị hai phía thì:*

+ $\nu(G) = \tau(G)$ − *tức là max số cạnh độc lập bằng min số đỉnh chốt chặn.*

+ $\alpha(G) = \rho(G)$ *nếu không có đỉnh cô độc − tức là Max số đỉnh độc lập bằng Min số cạnh phủ (đồ thị không chứa điểm cô độc).*

11.2 Kết đôi trong đồ thị bất kì, Định lý Tutte, Định lý Gallai

Định nghĩa 31. Cho đồ thị. Người ta kí hiệu bằng $c_p(H)$ là số các thành phần lẻ (thành phần có chứa số đỉnh là số lẻ) của H.

Định lý 44 (Tutte)**.** *Trong một đồ thị tồn tại một keyt đôi toàn phần khi và chỉ khi nếu với mọi $X \subseteq V(G)$ thì $c_p(G - X) \leq |X|$, tức là cho dù ta bỏ một số điểm của đồ thị thì trong phần còn lại số các thành phần lẻ luôn không lớn hơn số điểm đã bỏ đi.*

Định lý 45 (Gallai)**.**

1) $\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$ với G là đồ thị không chứa cánh xuyến.

2) $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$ với G là đồ thị không chứa điểm cô lập.

12 Mạng và dòng chảy

Định nghĩa 32. Cho G là một đồ thị có hướng. Mỗi cạnh của đồ thị được có tương ứng một giá trị thực không âm được gọi là công suất của cạnh (hay ống dẫn). Ta còn chỉ ra hai đỉnh s và t, gọi là s = *sản xuất* và t = *tiêu thụ*. Bộ 4 thành số liệu này (G, s, t, c) được gọi là một mạng.

12.1 Dòng chảy

Cho $f(e)$ là lưu lượng chảy trong ống e. Hàm f đước gọi là được phép nếu $f(e) \leq c(e)$ và cho $m(v) = \sum\{f(e)$ |điểm cuối của e là $v\}$ − $\sum\{f(e)$ | điểm đầu của e là $v\} = 0$, tức là tại một điểm $v \in V$ và khác s, t, lượng chảy vào và chảy ra là bằng nhau. Một hàm được phép như vậy tạo nên một *dòng chảy*.

12.2 Giá trị dòng chảy

Định nghĩa 33. Từ trên ta suy ra được $m(s) = -m(t)$. Giá trị chung này được gọi là giá trị của dòng chảy. Ký hiệu: m_f.

Ghi chú: Một cạnh (ống dẫn) e trong dòng chảy được gọi là đầy ắp nếu $f(e) = c(e)$ và được gọi là vơi nếu $m(e) < c(e)$.

12.3 Lát cắt

Định nghĩa 34. Cho $X \in V(\overline{G})$, $s \in X$ và $t \notin X$. Các cạnh có một đầu thuộc X và một đầu kia thuộc $\{(V(G) - X\}$ thì được gọi là lát cắt $-$ (s,t).

Công suất lát cắt.

Định nghĩa 35. Công suất của nhát cắt là tổng công xuất trên các cạnh đi ra từ X và đến một điểm thuộc $\{(V(G) - X\}$ (những cạnh như thế này được gọi là các cạnh ra, như vậy các cạnh đi vào X không được xếp vào lát cắt).

Ký hiệu: $c(C)$.

12.4 Thuật toán tìm dòng chảy cực đại và lát cắt cực tiểu

B.0 Dòng chảy $f \equiv 0$.

B.1 Lấy dòng chảy f' thay cho f nếu $f' > f$ đúng, lập lại quá trình này cho đến khi nào có thể, tức là ta thử xác định một dòng chảy cực đại từ s vào t.

B.2 Hãy vẽ một đồ thị bảo trợ H_f với các tính chất sau đây: (đồ thị của ta là $\overline{G}$, $e \in E(\overline{G})$, $e' \in E(H_f)$, u, $v \in V(\overline{G})$)
* $V(H_f) = V(\overline{G})$ tức là đỉnh của G và H_f trùng nhau.
* Nếu $e = \overline{uv}$ và $f(e) < c(e)$, khi đó $e' := \overline{uv}$, điều này có nghĩa là khi trong $\overline{G}$ giá trị của dòng chảy trong e nhỏ hơn công suất $c(e)$ khi đó trong $\overline{H_f}$ có cạnh đi từ u đến v.
* Nếu $e = \overline{uv}$ và $f(e) > 0$, khi đó $e' := \overline{vu}$ tức là khi trong $\overline{G}$ cạnh $\overline{uv}$ có giá trị lớn hơn 0, khi đó trong H_f có cạnh được chạy "quay lại" từ v về u.

B.3 Khi mà trong H_f tồn tại đường đi có hướng từ s đến t (đường này được gọi là đường cải thiện), khi đó có thể làm tăng giá trị của dòng chảy. Ta xét trong độ thì G đầu tiên đại lượng minimum nào có thể làm cho giá trị dòng chảy của đường cải thiện được tăng lên (tăng giá trị "cạnh tiên phong", giảm giá trị "cạnh quay đầu"). Sau đó ta tăng giá trị của dòng chảy trên các cạnh rồi sau đó quay lại bước 2, tiếp tục tìm các đường đi cải thiện mới.

B.4 Nếu không tồn tại các đường đi cải thiện, khi đó ta tìm được dòng chảy cực đại từ s đến t.
Lát cắt cực tiểu chính là tập hợp các đỉnh từ s có thể đạt được trên đồ thị bổ trợ.

Định lý 46 (Ford $-$ Fulkerson). *Giá trị của dòng chảy cực đại bằng công suất của lát cắt cực tiểu, tức là:* $Max\{m_f \mid f \text{ là dòng chảy từ } s \text{ đến } t\} = min\{c(C) \mid C \text{ lát cắt}\}$

Định lý 47 (Edmond $-$ Karp). *Nếu ta luôn luôn chọn một trong các đường đi cải thiện ngắn nhất, thì sau hữu hạn bước thuật toán sẽ dừng lại.*

12.5 Bổ đề các giá trị nguyên

Bổ đề: Nếu các công suất là các số nguyên, khi đó giá trị của m_f là số nguyên và thực hiện được bằng một dòng chảy mà trên các cạnh đều lấy giá trị nguyên.

Tổng quát hóa vấn đề dòng chảy

Ví dụ 1. Cái gì sẽ xảy ra nếu có nhiều nguồn cung và nhiều tiêu thụ?

Tạo nên một siêu đẳng Nguồn cung - SUPER (S) và một siêu đẳng tiêu thụ (T) được nối với các nguồn cung và tiêu thụ với những ống dẫn có công suất vô cùng. Với đồ thị mới này ta tìm dòng chảy cực đại từ S đến T, nếu tìm thấy, ta xóa hai điểm S và T.

Ví dụ 2. Điều gì xảy ra khi các đỉnh cũng có công suất?

Điều này có nghĩa là các công suất đầu vào không được vượt quá công suất - "sức chứa" của điểm. Khi đó ta quay về tình trạng truyền thống. Nếu một điểm v có công suất k, người ta thay v bằng hai điểm được nối với nhau bằng ống dẫn công suất k và một đầu ống là các cạnh vào và đầu kia là những cạnh ra.

Ví dụ 3. Điều gì xảy ra khi có cạnh vô hướng?

Ta thay cạnh vô hướng bằng hai cạnh riêng biệt ngược chiều nhau có cùng công suất. Khi xác định công suất và chiều của cạnh vô hướng, ta lấy hiệu giá trị công suất của hai cái cạnh và chiều là chiều của cạnh có giá trị lớn hơn làm giá trị cho cạnh vô hướng đầu tiên.

13 Định lý Menger

Định nghĩa 36. Trong đồ thị G có hướng hoặc vô hướng những đường đi P và Q chạy từ đỉnh u đến đỉnh v được gọi là có cạnh biệt lập nếu $E(P) \cap E(Q) = \emptyset$.

Định nghĩa 37. Trong đồ thị G có hướng hoặc vô hướng những đường đi P và Q chạy từ đỉnh u đến đỉnh v được gọi là có đỉnh biệt lập nếu $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$.

Định lý 48 (Menger I). *Nếu u và v là hai đỉnh khác nhau của đồ thị có hướng G, khi đó số cực đại những đường đi $u \to v$ có cạnh biệt lập bằng ốô minimum các cạnh chốt giữ các đường đi $u \to v$.*

Định lý 49 (Menger II). *Nếu u và v là hai đỉnh khác nhau không kề nhau của đồ thị có hướng G, khi đó số cực đại những đường đi $u \to v$ có đỉnh biệt lập bằng số minimum các đỉnh khác u và v chốt giữ các đường đi $u \to v$.*

Định lý 50 (Menger III). *Nếu u và v là hai đỉnh khác nhau của đồ thị vô hướng G, khi đó số cực đại những đường đi $u \to v$ có cạnh biệt lập bằng số minimum các cạnh chốt giữ các đường đi $u \to v$.*

Định lý 51 (Menger IV). *Nếu u và v là hai đỉnh khác nhau không kề nhau của đồ thị vô hướng G, khi đó số cực đại những đường đi $u \to v$ có đỉnh biệt lập bằng số minimum các đỉnh khác u và v chốt giữ các đường đi $u \to v$.*

Đa liên thông và khái niệm liên thông cạnh

Định nghĩa 38. Một đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông (đỉnh)* $k-$ *lần* nếu G có minimum $k+1$ đỉnh, và nếu bỏ đi bất kì $(k-1)$ đỉnh nào đó thì phần đồ thị còn lại vẫn liên thông. Số k lớn nhất để G vẫn là liên thông đỉnh $k-$ lần được kí hiệu là $\kappa(G)$.

Định nghĩa 39. Một đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông cạnh k-lần* nếu bỏ đi bất kì $(k-1)$ cạnh nào từ G thì phần đồ thị còn lại vẫn liên thông. Số k lớn nhất để G là liên thông cạnh k - lần được kí hiệu là $\lambda(G)$.

Định lý 52 (Menger V)**.** *Một đồ thị G là liên thông cạnh k-lần khi và chỉ khi nếu giữa hai điểm bất kì luôn tồn tại k đường đi biệt lập cạnh.*

Định lý 53 (Menger VI)**.** *Một đồ thị G là liên thông (đỉnh) k-lần khi và chỉ khi nếu giữa hai điểm bất kì luôn tồn tại k đường đi biệt lập đỉnh.*

Matrix láng giềng của đồ thị

Định nghĩa 40. Cho G là đồ thị n - đỉnh, $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. Khi đó matrix $A(G)$ kích thước $(n\times n)$ được gọi là *Matrix láng giềng* của G nếu với mọi phần tử $a_{i,j}$ thỏa mãn:

$$a_{i,j}=\begin{cases}0, & \text{nếu } v_i \text{ và } v_j \text{ là hai đỉnh láng giềng}\\ k, & \text{nếu giữa } v_i \text{ và } v_j \text{ccó đúng } k \text{ đường biệt lập}\\ t, & \text{nếu } i=j \text{ và có đỉnh này có đúng } t \text{ cạnh khuyên được móc vào nó.}\end{cases}$$

Lũy thừa của Matrix láng giềng

Định lý 54. *Cho G là đồ thị n - đỉnh, $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ và A,B là các matrix $(n\times n)$. Nếu $A=A(G)$ và $B=A^k$, khi đó với mọi $b_{i,j}\in B$ điều kiện sau thỏa mãn: $b_{i,j}=$ số đường từ v_i đến v_j có độ dài đúng bằng k.*