TS. Nguyễn Văn Lợi (chủ biên) – Ngô Thị Nhã

# NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN
# II.

Chương trình bồi dưỡng và phát triển năng lực

# ĐỒNG HÀNH CÙNG

# LOISCENTER

**Mục đích:**

Trước 18 tuổi được trang bị kiến thức

- Khoa học Toán - Máy tính
- Kỹ năng lập trình code - hệ thống
- Toán kinh tế - MBA

Đầu tư cho tương lai – Thông minh nhất – Hiệu quả nhất

# Đôi lời chia sẻ

Chỉ 10 – 20 năm nữa khi làn sóng công nghệ 4.0 sẽ định hình lại cấu trúc cuộc sống và xã hội. Cái đói nghèo đã được trả về cho quá khứ, lúc đó lao động không còn là để tồn tại mà chủ yếu nhằm mục đích sáng tạo và tiến bộ.

Các công việc sẽ tập trung vào 4 nhóm:

– Nghệ thuật

– Khoa học kỹ thuật

– Dịch vụ

– Sức khỏe và Thể thao

Tùy thuộc khả năng, con người có thể lựa chọn các thể loại công việc phù hợp. Nhưng bất kì công việc gì yếu tố sáng tạo và thi đua sẽ được đưa lên hàng đầu.

Chúng tôi chọn công việc chuẩn bị hành trang *tri thức khoa học kỹ thuật* cho lớp công dân thời đại 4.0 làm nhiệm vụ chính của mình.

# Mục lục



Ngày 24 tháng 4 năm 2019

# 1 Hàm tình trạng có giá trị bất biến

**1.1.** Trên bàn có 1 tờ giấy. Ta có thể xé tờ giấy đó làm 10 hay 16 mảnh. Sau đó từ một mảnh trên bàn vừa được xé chúng ta lại có thể xé thành 10 hay 16 mảnh tùy ý. Sau một số thao tác như vậy chúng ta có thể đạt được những khả năng sau đây:

a) đúng 400 mảnh b) đúng 399 mảnh c) đúng 22 mảnh

có ở trên bàn?

**1.2.** Một con rồng có 2006 cái đầu phun lửa. Chàng hiệp sĩ với một nhát kiếm của mình có thể chặt 1, 17, 21 hoặc 33 đầu rồng, khi đó sau mỗi lần rồng mọc thêm hoặc 10, 14, 0, 48 đầu khác (chưa bị chặt hết). Hỏi chàng hiệp sĩ sau một số lần có thể chặt hết đầu rồng hay không?

**1.3.** Có 2 bốc diêm, mỗi lần người ta lấy đi từ bốc này vài que diêm và cho vào bốc kia một số diêm gấp đôi số diêm vừa lấy. Hỏi có thể sau một số thao tác ta có thể đạt được mục đích số que diêm của cả hai bốc bằng nhau không nếu lúc đầu số diêm là

a) 4 và 34 b) 1 và 3

**1.4.** Một đống sỏi có 1001 viên trên bàn. Mỗi thao tác người ta chọn 1 đống sỏi có ít nhất 3 viên, vứt đi 1 viên, số còn lại chia thành hai đống mỗi đống ít nhất 1 viên. Hỏi sau hữu hạn các thao tác như vậy người ta có thể nhận được các đống sỏi mỗi đống 3 viên hay không?

**1.5.** Anh có 11 và Bình có 7 hòn bi ve. Nếu một người mua một số bi cho mình thì người kia liền mua số bi bằng 3 lần số bi người kia mua. Hỏi sau một số lần như vậy mỗi người có 50 viên bi hay không?

**1.6.** Trên bàn cờ $8 \times 8$ người ta che hai ô vuông đối nhau (ví dụ $A_1$ và $H_8$). Hỏi những ô còn lại có thể phủ kín bằng domino $2 \times 1$ hay không?

# 2 Giới thiệu hàm tình trạng

**2.1.** Xung quanh bàn có 6 người ngồi, trong đó có 2 người trước mặt mỗi người có 1 cái đĩa. Giữa 2 người "có đĩa" lại có 1 người ngồi. Mỗi thao tác người ta lại bầy trước mặt hai người ngồi cạnh nhau mỗi người một cái đĩa. Hỏi sau hữu hạn bước như vậy số đĩa có trước mặt mỗi người có thể bằng nhau được hay không?

**2.2.** Xung quanh bàn có 6 người ngồi, trong đó có 1 người trước mặt người đó có 6 cái đĩa. Mỗi thao tác người ta lại lấy từ một người mà có ít nhất 2 cái đĩa chia cho một người ngồi cạnh cả 2 đĩa, hoặc cho hai người ngồi bên mỗi người 1 cái. Hỏi sau hữu hạn bước như vậy, trước mặt mỗi người có thể có một cái đĩa hay không?

**2.3.** Các cây sồi đứng thành vòng tròn. Trên mỗi cây có một con sóc. Sau mỗi hiệu còi có hai con sóc bất kì nhảy sang cây bên cạnh. Hỏi có khi nào tất cả các con sóc ngồi trên cùng một cây hay không?

**2.4.** Người ta ghi các số $1, 2, \ldots, 2015$ lên bảng. Mỗi thao tác người ta xóa hai số và thay vào đó hiệu hai số đó (hiệu không âm). Làm như vậy đến khi chỉ còn 1 số trên bảng. Hỏi số sau cùng này có thể là 0 hay không?

**2.5** (Tiếp theo bài trên). Bây giờ thay đổi thao tác. Xóa hai số và viết thay vào đó

a) số dư của hiệu khi chia cho 18

b) số dư của hiệu khi chia cho 17

Hỏi số còn lại cuối cùng có thể là 0 hay không?

**2.6.** Nếu xóa 2 số và ghi số dư của tổng hai số đó khi chia cho 17 thì số cuối cùng sẽ là gì?

**2.7.** Trên bảng có 6 số 0, bảy số 1 và 8 số 2. Mỗi bước người ta xóa hai số và viết thêm một số thứ ba. Tiếp tục như vậy cho đến khi chỉ còn một số. Số này có thể là số nào? Số khác tại sao không?

**2.8.** Có thể hay không thể thao tác trên

a) không bao giờ chấm dứt?

b) kết thúc khi trên bảng còn nhiều số nhưng cùng giá trị?

**2.9.** Có luôn luôn thực hiện thao tác để cuối cùng chỉ còn một số trên bảng nhưng nhiều phiên bản?

**2.10.** Có thể chọn hay không $a$ số 0, $b$ số 1, $c$ số 2 ($a, b, c$ nguyên dương) sao cho với thao tác trên chúng ta không thể tạo được kết quả chỉ có một số duy nhất tồn tại trên bảng?

**2.11.** Người ta ghi số lên các đỉnh khối lập phương. Mỗi bước ta tăng hai số ở hai đầu của một cạnh nào đó mỗi số 1 đơn vị. Mục đích sao cho các số có giá trị như nhau. Hỏi có đạt được không nếu các số ban đầu là

a) một cạnh có 2 đỉnh là số 1 còn lại là số 0?

b) một đường chéo khối hộp có hai số 1, còn lại là số 0?

c) một đỉnh là số 1 còn lại là số 0?

d) một đường chéo mặt có số 1 còn lại là số 0?

**2.12.** Người ta xếp diêm lên các đỉnh của hình vuông. Lúc đầu tại một đỉnh có 1 que diêm, các đỉnh khác chưa có gì. Mỗi bước đi, người ta lấy đi từ một đỉnh vài que diêm và xếp lên đỉnh bên cạnh một số diêm bằng 2 lần số diêm đã lấy đi. Hỏi sau một số thao tác như thế này ta có thể – theo chiều đồng hồ nào đó – đạt được cấu hình trên các đỉnh số que diêm là $1, 9, 8, 9$?

**2.13.** Trên bàn cờ $8 \times 8$ người ta che 1 ô vuông. Hỏi những ô còn lại có thể phủ kín bằng domino $3 \times 1$ hay không?
Tình hình sẽ như thế nào với bàn cờ $N \times N$? $N \times M$?

**2.14.** Trên bảng có các số 2, $\sqrt{2}$ , và $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Mỗi lần ta có thể xóa đi hai số và viết thay vào đó $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lần tổng và hiệu (dương) của hai số đó. Làm như vậy một số lần chúng ta có thể nhận được các số 1, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ trên bảng hay không?

**2.15.**

a) Trên một hòn đảo có các con tiểu khủng long sinh sống. Có 13 con màu xám, 15 con màu nâu và 17 con màu xanh. Nếu hai con khác màu gặp nhau thì chúng giật mình chuyển sang màu thứ ba. Nếu hai con cùng màu gặp nhau thì chúng không biến đổi màu. Hỏi có khả năng tất cả các con tiểu khủng long có cùng một màu hay không?

b) Tình hình sẽ ra sao nếu lúc đầu có 13 xám, 25 nâu và 17 xanh sinh sống?

**2.16.**

a) Trong trường hợp b) khi nào các tiểu khủng long toàn là một mầu nâu? Hay xanh?

b) Với tình trạng xuất phát nào chúng ta có thể có màu cuối cùng là toàn xám? Nâu? Xanh?

**2.17.** Bàn cờ kích thước $n \times n$ được sơn đen trắng như thông lệ. Mỗi bước đi người ta đổi mầu của các ô vuông của một bảng con $2 \times 2$ sang màu ngược lại. Với giá trị nào của $n$ thì ta có thể đạt mục đích tất cả các ô vuông có cùng một màu?

**2.18.** Một dải (vô cùng) các hình vuông về cả hai phía người ta xếp bất kì những viên đá nhỏ (số lượng hữu hạn). Người ta thấy có một số hình vuông có ít nhất 2 viên đá. Người ta quyết định nếu gấp những trường hợp như vậy thì một viên xếp lên trên một viên lùi xuống dưới. Hỏi với thao tác này sau hữu hạn bước chúng ta có quay lại tình trạng ban đầu hay không?

**2.19.** (Kvant) cho dãy số $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, \dots$ bắt đầu từ số thứ 7 bằng chữ số cuối cùng của tổng 6 số trước. CMR trong dãy số này không xuất hiện dãy con $0, 1, 0, 1, 0, 1$.

**2.20.** Cho $p$ là một đa thức có bậc $n > 1$ và có hệ số chính là 1. Xét đồ thị của hàm số và các đường thẳng song song với trục $x$ và có giao điểm với đồ thị. Xét các điểm trên mỗi đường thẳng lấy trọng tâm của các điểm này. CMR các điểm này nằm trên một đường thẳng.

**2.21.** Vẫn bài toán trước với các thay đổi sau đây. $n > 3$ và các đường thẳng chỉ còn song song với nhau và cắt đồ thị. Hỏi mệnh đề của bài toán còn đúng không?

**2.22.** Xét đa thức bậc $n$ $(n > 1)$ $p(x) = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots$. Giả sử với bất kì số thực $a$ ta có $p(x+a) = x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots$. CMR

$$(n-1)p - 2nq = (n-1)P - 2nQ$$

**2.23.** Hãy phát biểu ý nghĩa hình học của biểu thức trên khi $n = 3$?

**2.24.** Xét một hàm bậc 4 có hệ số chính bằng 1. Một đường thẳng song song với trục $x$ được gọi là "Tốt" nếu đường thẳng cắt đồ thị ở 4 điểm. Giả sử bốn điểm cắt đó từ trái sang phải là $A$, $B$, $C$ và $D$. Đường thẳng được gọi là "kiểu tam giác" nếu các đoạn thẳng $AB$, $AC$, $AD$ thỏa mãn điều kiện là các cạnh của một tam giác. CMR các đường thẳng Tốt thì hoặc là đường thẳng kiểu tam giác, hoặc không có đường nào như vậy.

# 3 Hoán vị và nghịch đảo

**3.1.** Học sinh của một lớp đứng xếp hàng dọc theo thứ tự $ABC$. Mỗi bước đi ta chọn ra hai bạn và cho đổi chỗ. Hỏi với thao tác này ta có thể xếp lại các bạn học sinh theo chiều cao?

**3.2.** Học sinh của một lớp đứng xếp hàng dọc theo thứ tự $ABC$. Mỗi bước đi ta chọn ra hai cặp bạn và cả hai cặp cùng đổi chỗ cho nhau. Hỏi với thao tác này ta có thể xếp lại các bạn học sinh theo chiều cao?

**3.3.** Các số $1, 2, \ldots, n$ được lần lượt ghi lên bảng liên tiếp theo nhau. Mỗi bước đi ta có thể chọn hai số và đổi chỗ cho nhau. Hỏi sau 2007 bước chúng ta có thể lập lại trật tự ban đầu hay không?

**3.4.** Trên bảng $4 \times 4$ có 15 ô được điền mỗi ô một số. Có một ô còn rỗng. Người ta có thể dịch chuyển bất kì ô nào bên cạnh vào chỗ trống nếu nó là láng giềng có chung cạnh với nhau. Hỏi có thể đổi chỗ hai ô số 1 và ô số 2 còn các ô khác về nguyên vị trí cũ của chúng bằng cách dịch chuyển nêu trên được không?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

# 4 Sử dụng hàm tình trạng tìm kết quả cuối cùng

**4.1.** Trong *vườn thần* trên cây có 25 quả chuối và 30 quả cam. Mỗi lần được hái 2 quả. Nếu hái quả giống nhau thì cây mọc thêm 1 quả cam, nếu khác nhau thì mọc thêm 1 quả chuối. Hỏi cuối cùng trên cây còn lại quả gì?

**4.2.** Trong bình có 75 hạt đỗ trắng và 150 hạt đỗ đen. Bên ngoài có một bốc (đủ nhiều) các hạt đỗ đen. Người ta làm như sau: Mỗi lần lấy ra 2 hạt đỗ, nếu có hạt đen thì đặt ra ngoài, hạt kia bỏ lại vào bình bất kể là màu gì. Nếu cả hai là trắng thì bỏ cả hai hạt đi và bỏ vào bình một hạt đen. Cứ như vậy sau mỗi lần trong bình giảm đi một hạt. Hỏi lần xác suất để hạt đỗ cuối cùng trong bình là mầu trắng? Phải thực hiên bao nhiêu bước?

**4.3.** Trong bình có $n$ hạt đỗ trắng và $n$ hạt đỗ đen. Bên ngoài có một bốc (đủ nhiều) các hạt đỗ đen. Người ta làm như sau: Mỗi lần lấy ra 2 hạt đỗ, nếu có hạt đen thì đặt ra ngoài, hạt kia bỏ lại vào bình bất kể là màu gì. Nếu cả hai là trắng thì bỏ cả hai hạt đi và bỏ vào bình một hạt đen. Cứ như vậy sau mỗi lần trong bình giảm đi một hạt. Hỏi lần hạt đỗ cuối cùng trong bình là mầu gì? Phải thực hiện bao nhiêu bước?

**4.4.** Có một chiếc cân 2 đĩa và 101 quả cân tổng trọng lượng là 200 gram, các quả cân có số đo trọng lượng là số nguyên dương tính theo gram. Người ta lần lượt đặt các quả cân − theo thứ tự trọng lượng giảm dần − lên đĩa cân theo quy tắc đĩa cân nào nhẹ hơn thì được ưu tiên xếp trước. CMR cuối cùng trọng lượng hai bên sẽ ở trạng thái cân bằng.

**4.5.** Bàn cờ kích thước $n \times n$ được sơn đen trắng như thông lệ. Mỗi bước đi người ta đổi mầu của các ô vuông của một bảng con $2 \times 2$ sang màu ngược lại. Với giá trị nào của $n$ thì ta có thể đạt mục đích tất cả các ô vuông có cùng một màu?

**4.6.** Trên mặt phẳng có một số điểm được sơn màu xanh, đỏ. Một số điểm được nối với nhau. Một điểm được gọi là đặc biệt nếu quá nửa số các điểm được nối với nó có màu khác của điểm đó. Ta chọn một điểm đặc biệt (nếu có) và sơn lại sang mầu khác. CMR sau một số lần làm như vậy, sẽ không còn điểm đặc biệt.

**4.7.** Nhà của các chú lùn sống trong rừng có màu trắng hoặc màu xanh. Họ thống nhất với nhau rằng nếu người ta tìm thấy một chú lùn mà màu căn nhà của anh ta khác với phần lớn màu nhà của các chú lùn khác, thì anh ta sẽ sơn lại màu nhà của mình. Mỗi hôm có một chú lùn đi xem nhà của các bạn khác, để xem mình có phải sơn lại nhà hay không? CMR chỉ sau hữu hạn thời gian không ai phải sơn lại nhà của mình nữa.

**4.8.** Trong bài toán trên. Ở thời điểm cuối cùng, mầu của các ngôi nhà được xác định cụ thể? (duy nhất).

**4.9.** Trên lưới ô vuông rộng vô cùng có một số (hữu hạn) ô được tô màu đen và 1 ô được tô màu trắng. Với thời điểm thứ $t = 1, 2, 3, \ldots$, mỗi một hình vuông được chuyển sang sơn màu mà trong các ô − chính nó, ô phía trên, và ô bên phải − có nhiều hơn. CMR sau một thời gian sẽ không còn ô có màu đen.

**4.10.** Cho trước một đa giác lõm. Người ta thực hiện thao tác sau. Nếu $A$ và $B$ không phải là các đỉnh láng giềng và đa giác nằm hoàn toàn về một phía của đường thẳng $AB$, khi đó một phần đa giác giới hạn bởi $A$ và $B$ được lấy đối xứng qua trung điểm của $AB$. CMR sau một số lần thực hiện phép biến hình đa giác sẽ là hình lồi.

**4.11.** Dãy Fibonaci $1, 1, 2, \ldots$ với mọi $n$ luôn có một số tận cùng bằng $n$ chữ số 0 và tiếp sau là số 1.

**4.12** (Putnam 2007)**.** Bàn cờ $n \times n$ có $n^2$ vuông. Trong đó có $n - 1$ ô bị nhiễm bệnh. Sau mỗi đơn vị thời gian các ô vuông có ít nhất hai cạnh nằm kề ô bị nhiễm bệnh thì cùng bị nhiễm bệnh. CMR vẫn luôn có ít nhất một ô không nhiễm bệnh.

# 5 Hàm tình trạng để chứng minh có lời giải

**5.1.** Trên mặt phẳng có $2n$ điểm tổng quát. CMR luôn tìm được một đường thẳng mà mỗi bên có $n$ điểm.

**5.2.** Cũng như bài trên nhưng bây giờ cho trước một điểm và đường thẳng đi qua điểm đó.

**5.3.** Cho $2n+1$ điểm trên mặt phẳng không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào trên một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm và phần bên trong và bên ngoài có số điểm bằng nhau.

**5.4.** Cho một hình lồi hữu hạn trên mặt phẳng và một điểm $P$ ngoài nó. Chứng minh rằng qua $P$ kẻ được một đường thẳng chia đôi diện tích của $S$ (chu vi).

**5.5.** Cho một hình lồi hữu hạn $S$ trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng chia đôi cả diện tích và chu vi.

**5.6.** Cho trước $n$ điểm trên mặt phẳng. CMR luôn luôn tồn tại một đường gấp khúc không tự cắt mà các đỉnh là có điểm đã cho.

*Trong các bài tập sau, hàm tình trạng không phải là hàm mà bài tập khêu gợi.*

**5.7.** Cho trước $2n$ điểm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng luôn chọn được từ các điểm này $2n$ đoạn thẳng hoàn toàn không có điểm chung.

**5.8.** Cho trước $n$ điểm đỏ và $n$ điểm xanh trên mặt phẳng không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng chọn được $n$ đoạn thẳng mỗi đầu một mầu và không đoạn thẳng nào điểm chung với đoạn thẳng nào.

**5.9.** Cho trước trên mặt phẳng $n$ điểm tổng quát và cho trước $n$ đường thẳng đôi một không song song. CMR từ mỗi điểm luôn kẻ được một đường vuông góc đến một đường thẳng sao cho các đoạn thẳng vuông góc này không có điểm chung.

**5.10.** Cho trước một đơn đồ thị $n$ đỉnh, bậc của mỗi đỉnh không quá 11. CMR các điểm có thể tô bằng bốn mầu sao cho không quá $n$ cạnh có chung một mầu. Cho thể tổng tổng quát bài toán như thế nào?

**5.11.** Trên mặt phẳng cho $n$ đường thẳng, các đường thẳng đôi một cắt nhau nhưng tất cả không đồng quy. CMR tồn tại một điểm trên mặt phẳng có đúng hai đường thẳng đi qua.

**5.12.** Nếu $k > 2$ và một đơn đồ thị có tất cả các đỉnh có bậc nhỏ nhất là $k$. Khi đó tồn tại một đường tròn có độ dài ít nhất là $k + 1$.

**5.13.** Trong một đơn đồ thị có đường tròn khi đó tồn tại đường tròn đi quá một điểm và chứa tất cả các điểm là láng giềng của điểm này.

**5.14** (Định lí Dirac)**.** Vua hùng cho gọi $2n$ kị sĩ vào cung, mỗi kị sĩ có không quá $n - 1$ kẻ thù trong số người được gọi đến. Chứng minh rằng:

a) Bất kì hai kị sĩ thù hằn nhau đều có bạn chung (đồ thị có đường kính là 2).

b) Chứng minh rằng mệnh đề trên còn đúng với $2n - 1$ kị sĩ nhưng ít hơn thì không thỏa mãn.

c) Nhà vua có thể xếp các kị sĩ ngồi xung quanh một bàn tròn sao cho những người thù định nhau không ngồi cạnh nhau.

Sự thù hằng là tương hỗ, những ai không phải kẻ thù thì là bạn.

**5.15.** Chúng ta sử dụng hàm tình trạng ở chỗ nào trong các chứng minh trên?

**5.16.** Cho trước một số $x$, chúng ta gọi một số là hậu duệ của số $x$ nếu nhận được nó từ các mệnh lệnh sau:
Nếu tận cùng bằng 0 hoặc 4 thì xóa số cuối cùng. Trong các trường hợp khác thì nhân với 2. Một số là tiền bối của hậu duệ và tất cả các hậu duệ của hậu duệ. Chứng minh rằng số 4 là tiền bối của tất cả các số tự nhiên.

**5.17.** Xung quanh một hình lồi hữu hạn có thể vẽ được một tứ giác tiếp xúc (tứ giác mà tất cả các cạnh đều là đường thẳng đỡ của hình).

**5.18.** Trên bàn học sinh có một cái cân hai đĩa. Trên các đĩa có các quả cân. Lúc đầu đĩa cân bên phải nặng hơn. Các quả cân đều có trọng lượng khác nhau. Trên mỗi quả cân đều có một vài tên học sinh. Khi có một học sinh bước vào phòng thì người ta đặt quả cân có chứa tên học sinh đó sang đĩa cân bên kia. Hãy chứng minh rằng có thể cho một vài học sinh lần lượt theo nhau vào lớp để cuối cùng đĩa cân bên trái nặng hơn.

**5.19.** Trên tất cả các đỉnh của ngũ giác đều được ghi mỗi đỉnh một số nguyên để tổng của 5 số này là một số dương. Giả sử có ba đỉnh liền nhau $X$, $Y$, $Z$, các số trên mỗi đỉnh là $x, y, z$ và $y < 0$. Khi đó thay cho ba số này người ta viết các số lần lượt là $x + y$; $-y$; $z + y$. Thao tác này thực hiện cho đến khi không còn số âm nào. Hỏi quá trình này có dừng lại sau hữu hạn bước đi?

**5.20.** Xuất phát từ số 0 có hai thao tác được cho phép:

a) Cộng thêm một đơn vị.

b) Nhân với 2.

Ít nhất cần bao nhiêu theo tác để có thể đạt được giá trị $10; 11; ...; n$?

**5.21.** Có $n$ tuyển thủ bóng bàn có trình độ khác nhau rõ ràng (nếu $a$ thẳng $b$, $b$ thắng $c$ thì $a$ cũng thắng $c$ – có tính chất bắc cầu). Người ta muốn chọn người giỏi nhất thì ít nhất cần bao nhiêu trận đấu?

**5.22.** Có $n$ tuyển thủ, người ta muốn tìm người giỏi nhất và tìm người kém nhất trình độ của mỗi người khác nhau rõ ràng và có tính bắc cầu. Chứng minh rằng cần ít nhất $1,5n - 2$ trận đấu.

**5.23.** Cho một đồ thị hữu hạn bậc của các đỉnh không quá $a + b + 1$ với $a$ và $b$ là số nguyên dương. Các đỉnh của nó có thể chia làm hai phần sao cho trong một phần tất cả các bậc không quá $a$. Phần bên kia các đỉnh có bậc không quá $b$. Có thực hiện được hay không?

# 6 Các bài tập luyện tập

**6.1.** Một số có 2011 chữ số. Ta đổi chỗ các chữ số của nó một cách tùy ý. Hỏi có thể tạo ra được hai số có hiệu bằng 2011?

**6.2.** Ta xóa chữ số đầu tiên của số $7^{2011}$ rồi cộng số đó với phần còn lại ta được một số mới. Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi chỉ còn số có mười chữ số. Chứng minh rằng trong số nhận được có 2 chữ số giống nhau.

**6.3.** Cho các số $2 - \sqrt{3},\ 4,\ 5 + \sqrt{3}, 7$. Ta thay cả bốn số mỗi số bằng trung bình cộng của 3 số còn lại. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi sau một số lần thực hiện có thể nhận được các số $4 - \sqrt{3},\ 3,\ 2 + 2\sqrt{3},\ 8$.

**6.4.** Trên bảng có các số $7 + \sqrt{2},\ 5\sqrt{2} - 1,\ 9$. Mỗi lần đi người ta có thể chọn 2 số ví dụ $a$, $b$ và thay chúng bằng hai số $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$. Hỏi sau một vài lần đi ta có thể nhận được các số $8 + \sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 7$ hay không?

**6.5.** Cho các số $\sqrt{5} - 2,\ \sqrt{5} + 2,\ 7$. Ta thay cả ba số mỗi số bằng trung bình nhân của 2 số còn lại. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi sau một số lần thực hiện có thể nhận được các số $3 - \sqrt{5},\ \sqrt{5} + 3,\ 2$ hay không?

**6.6.** Cho $f : \square \to \square,\ f(x) = x^2 - 11x + 24$. Thay hàm $f(x)$ bằng hàm $x^2 \cdot f\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ ta có thể nhận được hàm $g(x) = x^2 - 7x + 10$?

**6.7.** Cho $f : \square \to \square,\ f(x) = x^2 + 2010x + 2011$. Thay hàm $f(x)$ bằng hàm $(x-2)^2 \cdot f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ ta có thể nhận được hàm $i(x) = x^2 + 2011x + 2012$?

**6.8.** Một tam giác có thể chia thành các mảnh và ghép lại thành hình chữ nhật bằng cách tịnh tiến hoặc phép quay thích hợp.
Một tam giác có thể chia thành các mảnh và chỉ với phép tịnh tiến có thể ghép các mảnh thành hình chữ nhật được không?

**6.9.** Một máy tính tay sau khi viết số đầu tiên chỉ thực hiện được các phép tính cộng $(+)$ trừ $(-)$ và nghịch đảo $(-1)$; thêm nữa số đầu tiên và các kết quả từng phần có thể gọi ra nhiều lần. Có thể nhận giá trị 1 hay không nếu giá trị đầu tiên là $\sqrt{19}+\sqrt{97}$?

**6.10.** Trên bảng có số 18. Mỗi phút người ta nhân số đó hoặc chia nó không dư cho 2 hoặc 3 và viết lại lên bảng thay cho số trước nó. Cứ tiếp tục làm như vậy. CMR sau 1 giờ trên bảng không thể là số 96.

**6.11.** Cho tập hợp $\{1;5;8\}$. Ta chọn ra hai số một số được nhân với $\sqrt{2}$ lần của trung bình cộng của 2 số đó, một số được nhân với $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lần hiệu của hai số đó. Thay hai số vừa nhận được cho các số đã chọn. Cứ tiếp tục như thế với hai số được chọn bất kì. Sau một số bước đi có thể đạt được bộ số $\{2;4;9\}$ được không?

**6.12.** Lưới ô vuông $10\times 10$ có 9 ô vuông bị mọc đầy cỏ dại. Một ô vuông mới sẽ lây cỏ dại nếu ít nhất có hai ô có cạnh chung (láng giềng) đã bị cỏ dại. Hỏi sau một thời gian cả lưới ô vuông bị cỏ mọc đầy không? (Tất cả các ô vuông bị cỏ).

**6.13.** Người ta ghi lên bảng đa thức $f(x)=x^2+10x+20$.
Chọn bất kì một hệ số nào của đa thức và hoặc tăng thêm hoặc giảm đi 1 đơn vị. Sau một số lần thực hiện công việc trên bảng xuất hiện đa thức $g(x)=x^2+20x+10$. CMR trong quá trình biến đổi có một lúc nào đó đã có một đa thức có nghiệm nguyên xuất hiện trên bảng.

**6.14.** Cho lưới ô vuông $3\times 3$. Các vuông được ghi bằng các số như trong hình. Hai ô vuông con được gọi là láng giềng nếu có chung một cạnh. Ta thực hiện phép toán sau đây: Hai số nằm trên hai ô vuông láng giềng thì được cộng thêm cùng một số bất kì nào đó. Hỏi sau một số bước đi chung ta có thể thu được về một lưới ô vuông có bốn góc có số 1 còn các ô vuông còn lại là các số 0.

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 2 |
| 6 | 7 | 0 |
| 4 | 9 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $k$ |

**6.15.** Người ta xóa một hình vuông góc nào đó của bàn cờ $8\times 8$. Hỏi phần còn lại của bàn cờ có thể phủ được bằng các quân tetris $1\times 3$ ô vuông có kích thước bằng kích thước của các ô vuông con của bàn cờ?

**6.16.** Có 27 que diêm trên bàn. Hai người chơi, mỗi lần mỗi người có thể lấy $1,2$ hoặc 3 que diêm. Ai lấy que cuối cùng người đó thắng trận.

**6.17.** Có 44 cây đứng thành vòng quanh một đường tròn, trên mỗi cây có một chú khỉ. Cứ mỗi phút lại có hai chú khỉ nhảy sang hai cây bên cạnh, một theo hướng kim đồng hồ, một theo chiều ngược lại. Có hay không một thời điểm nào đó tất cả các con khỉ ở trên cùng một cây?

**6.18.** Người ta ghi các số nguyên lên các đỉnh của một ngũ giác sao cho tổng các số là dương. Nếu ba đỉnh liên tiếp nhau có các số là $a,b,c$ và $b<0$. Thì ta thay các số đó theo thứ tự là $a+b,\ -b$ và $c+b$. CMR chỉ sau hữu hạn bước trên đỉnh của ngũ giác chỉ còn các số không âm.

# 7 Bài tập nâng cao

**7.1.** Từ 24 mảnh giấy người ta chọn vài mảnh và cắt mỗi mảnh thành 10 mảnh nhỏ hơn. Sau đó người ta lại chọn vài mảnh và lại cắt các mảnh đó thành 10 mảnh... cứ tiếp tục như vậy. Hỏi có lúc nào người ta có 2017 mảnh nhỏ không?

**7.2.** Người ta viết lên bảng các số $1, 2, 3, ..., 9, 10$. Cứ mỗi lần người ta xóa hai số và viết thay lên bảng hiệu của hai số đó. Sau 10 lần thao tác số còn lại có thể là 0 hay không?

**7.3.** Trên bảng có 50 số 0 và 50 số 1. Mỗi lần người ta xóa đi 2 số và viết thay vào đó số 1 nếu hai số bị xóa bằng nhau, trường hợp khác viết 0. Hỏi số cuối cùng còn lại sau 99 lần thực hiện công việc là bao nhiêu?

**7.4.** Bình có 6 mảnh giấy. Bạn đó chọn một mảnh và chia (cắt) thành 11 mảnh nhỏ. Rồi từ các mảnh giấy chọn 1 mảnh và chia thành 6 mảnh. Sau đó bạn cứ chọn một tờ và chia tờ đó lúc thì 6 mảnh lúc thì 11 mảnh theo ngẫu hứng, không quan tâm các lần chia thành 6 hay thành 11 phải thay đổi nhau. Một lúc sau Bình nhẩm thấy đã có 2017 mảnh con. Hỏi bạn đó nhẩm đúng hay sai?

**7.5.** Người ta viết các số $1, 2, ..., 20$ lên bảng. Mỗi lần xóa hai số $a$ và $b$ thay vào đó họ ghi số $A$ . Hỏi sau 19 lượt số nào có thể còn lại trên bảng nếu

i) $A = a + b - 1$

ii)* $A = ab + a + b$?

**7.6.** Trong bình có 75 hạt đỗ trắng và 150 hạt đỗ đen. Bên ngoài có một bốc (đủ nhiều) các hạt đỗ đen. Người ta làm như sau. Mỗi lần lấy ra 2 hạt đỗ, nếu có hạt đen thì đặt ra ngoài, hạt kia bỏ lại vào bình bất kể là màu gì. Nếu cả hai là trắng thì bỏ cả hai hạt đi và bỏ vào bình một hạt đen. Cứ như vậy sau mỗi lần trong bình giảm đi một hạt. Hỏi lần cuối cùng trong bình còn lại hạt đỗ màu gì?

**7.7.** Trong vườn thần trên cây có 25 quả chuối và 30 quả cam. Mỗi lần được hái 2 quả. Nếu hái quả giống nhau thì cây mọc thêm 1 quả cam, nếu khác nhau thì mọc thêm 1 quả chuối. Hỏi cuối cùng trên cây còn lại quả gì?

**7.8.** Lúc đầu tất cả các ô trong bảng $3 \times 3$ đều ghi số 0. Mỗi lần đi người ta chọn một bảng $2 \times 2$ con nào đó và tăng các số trong mỗi ô thêm 1 đơn vị. Sau một số lần hỏi bảng số sau đây có thực hiện được không?

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 5 |
| 10 | 18 | 12 |
| 6 | 13 | 7 |

**7.9.** Có hai nắm diêm trên bàn. Cứ một lượt người ta lấy đi từ một nắm vài que diêm và cho vào nắm kia số diêm gấp đôi. Có cách làm nào sao cho hai nắm có số diêm giống nhau không nếu lúc đầu số diêm của hai nắm là 1 và 2?

**7.10.** Người ta xắp xếp diêm tại ba đỉnh của một tam giác. Mỗi lần họ lấy đi một số diêm từ một đỉnh và thêm vào ở mỗi hai đỉnh kia một số diêm gấp đôi. Hỏi sau một số lần người ta có thể đạt được số diêm ở cả ba đỉnh bằng nhau nếu số diêm ban đầu là $1, 0, 0$?

**7.11.** Người ta xắp xếp diêm tại bốn đỉnh của một hình vuông. Mỗi lần họ lấy đi một số diêm từ một đỉnh và thêm vào ở một trong hai đỉnh liền kề kia một số diêm gấp đôi. Hỏi sau một số lần người ta có thể đạt được số diêm ở bốn đỉnh là $1, 9, 8, 9$ nếu số diêm ban đầu là $1, 0, 0, 0$?

**7.12.** Người ta ghi số lên đỉnh của một hình vuông. Mỗi lượt người ta tăng hai số ở hai đỉnh liền nhau thêm 1 đơn vị. Hỏi sau một số lần các số của các đỉnh có thể bằng nhau không nếu:

i) Số ở các đỉnh lúc đầu lần lượt là $1, 0, 0, 0$?

ii) Số ở các đỉnh lúc đầu là $1, 0, 1, 0$?

**7.13.** Người ta ghi bốn số 1 và năm số 0 lên một vòng tròn theo thứ tự bất kì. Sau đó giữa mỗi cặp hai số cạnh nhau người ta ghi số 0 nếu hai số giống nhau và số 1 nếu hai số khác nhau rồi xóa tất cả 9 số trước đó. Hỏi nếu cứ tiếp tục như vậy có khi nào ta nhận được toàn các số 0?

**7.14.** Trên đồi có 44 ( 14?) cây đứng thành một vòng tròn. Trên mỗi cây có một con sóc. Cứ mỗi lần lại có hai con sóc nhảy sang cây bên cạnh. Hỏi sau một thời gian tất cả các con sóc đều ở trên cùng một cây không?

**7.15.** Giờ thể dục 21 ($n$) học sinh đứng thành hàng ngang trước mặt cô giáo. Sau hiệu còi tất cả các em quay $90^0$, em quay bên trái, em quay bên phải gây nên tình trạng ngược xuôi lộn xộn. Cô hạ lệnh sau mỗi hiệu còi tiếp theo những em nào mặt quay vào nhau (và chỉ các em đó) thì quay vòng $180^0$. Cu Tý lẩm bẩm:
− thế thì có mà hết giờ không xong còn thể dục gì nữa!
Hỏi nhận định của Tý đúng hay sai?
(Hãy chỉ ra rằng sau không qua $n + 1$ lần − trật tự sẽ hình thành).

# 8 Luyện tập tổng hợp

**8.1.** Trên bàn có một đống 1001 viên sỏi. Người ta phân thành các nhóm nhỏ như sau: Mỗi bước đi người ta chọn một nhóm có nhiều hơn hai viên sỏi, bỏ đi một viên, số còn lại chia thành hai nhóm. Với cách làm như vậy bạn có thể đạt được mục đích trên bàn chỉ còn các nhóm mỗi nhóm có 3 viên sỏi hay không?

**8.2.** Có một hội có $N$ thành viên. Mỗi thành viên của hội quen không quá 19 thành viên khác. Nhiệm vụ phải làm là phân các thành viên thành 2 loại, phân hội số 7 và phân hội số 11. Trong đó loại 7 là những người quen không quá 7 thành viên trong phân hội đó và loại 11 quen không quá 11 thành viên trong phân hội đó. Một nhà toán học đề nghị cách làm sau: Đầu tiên phân ra thành hai nhóm bất kì, sau đó cải tiến dần từng bước các lỗi. Ai trong hội 7 mà có ít nhất 8 người quen thì cho sang hội 11 và ngược lại, ai có ít nhất 12 người quen bên hội 11 thì chuyển người đó sang hội 7. Sau mỗi lần thực hiện, số lỗi sẽ giảm đi. Làm như vậy với một số (hữu hạn) lần. Hỏi phương pháp này có mang lại kết quả mong muốn không?

**8.3.** Có bảng lưới ô vuông trên hình. Mỗi ô được đánh dấu (+) hoặc (−) . Mỗi lần đi người ta có thể đổi dấu 1 hàng, cột hay một dãy song song với một đường chéo nào đó. Hỏi sau một số lần người ta có thể nhận được một bảng toàn dấu cộng hay không?

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | + | – | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |

**8.4.** Các ô của bàn cờ $8 \times 8$ được ghi một số nguyên. Được phép thực hiện thao tác sau: Mỗi hình vuông con trong các hình $3 \times 3$ hoặc $4 \times 4$ nào đó được tăng thêm 1 đơn vị. Hỏi sau một số lần thực hiện thao tác này,dù xuất phát từ bất kể bảng số đầu tiên nào, ta đều có thể tạo được một bảng mà tất cả các ô chứa số chia hết cho 3 được hay không?

**8.5.** Dãy số $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, \dots$ được hình thành tiếp tục theo quy tắc từ số thứ 7 trở đi người ta cộng số 6 số đứng liên tiếp trước nó, chữ số cuối cùng của tổng này sẽ là số tiếp theo. Hỏi sau một số lượt đi chúng ta có thể nhận được dãy con $0, 1, 0, 1, 0, 1$ hay không?

**8.6.** Có 11 cái ghế được xếp theo một hàng và đánh số theo thứ tự $1, 2, 3, \dots, 11$. Mỗi lần đi, được phép đảo ngược vị trí của 4 chiếc ghế đứng liền nhau. Ví dụ $4, 5, 9, 8$ thành $8, 9, 5, 4$. Với động tác như vậy bạn có thể đổi được thứ tự của hai chiếc ghế liền nhau được hay không? Câu trả lời sẽ là thế nào nếu thay 11 ghế bằng dãy 12 cái ghế, hoặc thay việc thay đổi 4 chiếc ghế bằng đảo chiều 3 chiếc ghế cạnh nhau? Điều gì xảy ra khi các chiếc ghế được xếp xung quanh một chiếc bàn tròn?

**8.7.** Một hình lập phương $4 \times 4 \times 4$ được xếp từ 64 hình lập phương con. Người ta lấy ra một hình lập phương nhỏ còn lại 63 hình được đánh số từ 1 đến $63 -$ tất cả các mặt đều được ghi. Khi bắt đầu chơi các khối lập phương đang ở một trật tự nào đó. Người ta có thể đẩy bất kì khối lập phương con nào vào chỗ trống nếu có chung mặt với vị trí đó (đứng cạnh ô trống). Hỏi với thao tác đẩy các khối lập phương thế chỗ như vậy, thì có thể nhận được một cấu hình mà các hình lập phương vẫn ở nguyên vị trí khi khởi động (kể cả các khối khuất bên trong) chỉ ngoại trừ khối lập phương 1 và 2 được đổi chỗ cho nhau?

**8.8.** Người ta viết lên quanh đường tròn vài số thực. Sau đó thực hiện công việc sau: Khi các số liên tiếp nhau $a, b, c, d$ xảy ra trường hợp $(a - d)(b - c) < 0$ thì người ta đổi chỗ $b$ và $c$. CMR thao tác này chỉ có thể thực hiên vài lần (hữu hạn).

**8.9.** Người ta viết lên đỉnh của một ngũ giác đều mỗi đỉnh một số nguyên sao cho tổng của năm số này dương. Thao tác sau đây được phép thực hiện: Nếu ba đỉnh $X, Y, Z$ và các số của nó là $x, y, x$ với $y < 0$, khi đó thay vào vị trí của các số này và cũng theo thứ tự này người ta điền vào đó các số $x + y, -y, z + y$. Công việc này tiếp diễn cho đến khi không còn các số âm. Hỏi có thể kết thúc thao tác sau hữu hạn bước?

**8.10.** Với cụm 4 số người ta định nghĩa thao tác:

$$(a, b, c, d) \to (a - b, b - c, c - d, d - a)$$

Hãy chỉ ra rằng nếu lúc đầu trong 4 số có ít nhất 2 số khác nhau, thì sau một số lần đủ nhiều để thực hiện thao tác này trong bốn số nhận được có số lớn hơn 1991?

**8.11.** Trên lưới ô vuông trắng rộng vô cùng người ta sơn đen một số ô. Sau đó cứ mỗi phút lại có sự biến đổi màu. Các ô vuông sẽ biến thành mầu mà trong các ô cạnh nó hoặc trên nó mầu nào có nhiều hơn (trong 3 ô láng giềng). Hãy chứng minh rằng sau hữu hạn thời gian, tất cả các ô sẽ là màu trắng.

**8.12.** Trên lưới ô vuông trắng rộng vô cùng người ta sơn đen một số ô. Sau đó cứ mỗi phút lại có sự biến đổi màu. Các ô vuông sẽ biến sang mầu mà ô bên phải và ô bên trên nó có cùng màu đó), các trường hợp khác thì giữ nguyên màu. Hãy chứng minh rằng sau hữu hạn thời gian, tất cả các ô sẽ là màu trắng.

**8.13.** Nhà của các chú lùn sống trong rừng có màu trắng hoặc màu xanh. Họ thống nhất với nhau rằng nếu người ta tìm thấy một chú lùn mà màu căn nhà của anh ta khác với phần lớn màu nhà của các chú lùn khác, thì anh ta sẽ sơn lại màu nhà của mình. Mỗi hôm có một chú lùn đi xem nhà của các bạn khác, để xem mình có phải sơn lại nhà hay không? CMR chỉ sau hữu hạn thời gian không ai phải sơn lại nhà của mình nữa.

**8.14.** Trong thành phố của những Người Lùn xảy ra bệnh dịch. Vài người bị cảm lạnh. Sau đó phát triển thành bệnh dịch lây lan. Nếu một người khoe thăm một người ốm thì hôm sau anh ta cũng bị ốm. Những người lùn ốm một ngày rồi ngày hôm sau miễn dịch một ngày (tức là cả ngày hôm sau không bị lây bệnh). Tất cả các người lùn khỏe mạnh hàng ngày đi thăm các bạn ốm của họ. Hãy chứng tỏ rằng có một người lùn nào đó ngày đầu tiên khi phát dịch đã được tiêm phòng (ngày đó người này miễn dịch) thì bệnh dịch có thể kéo dài vô hạn. Nếu không chắc chắn bệnh dịch sẽ kết thúc.

**8.15.** Trên mảnh đất $5 \times 5$ người ta chia thành các mảnh ô vuông $1 \times 1$. Có 25 con lật đật, mỗi con chỉ có thâm thù với không quá 3 con khác (thâm thù là tương hỗ). Hãy chỉ ra rằng có thể phân các con lật đật vào các mảnh hình vuông sao cho những con thâm thù nhau không ngồi cạnh nhau (hai ô vuông gọi là cạnh nhau nếu có cạnh chung).

**8.16.** Trong một quốc hội, mỗi đại biểu có không quá 3 đối thủ (hai chiều). Hãy chỉ ra rằng có thể chia các đại biểu thành hai nhóm mà trong mỗi nhóm không ai có nhiều hơn một đối thủ.

**8.17.** Một nhóm $2n$ trong đó mỗi người không có quá $(n-1)$ kẻ thù (quan hệ kẻ thù là hai chiều). CMR có thể xếp mọi người vào một chiếc bàn tròn mà những người ngồi cạnh nhau không phải kẻ thù của nhau.

**8.18.** Có $n$ điểm. Giữa chúng có một số điểm được nối với nhau. Từ mỗi điểm không xuất phát nhiều hơn 11 cạnh. CMR các điểm có thể tô bằng 4 màu sao cho không có quá $n$ điểm có cùng màu và được nối nhau.

**8.19.** Trên mặt phẳng có $2n$ điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Các điểm một nửa là màu xanh, một nửa là màu đỏ. Hãy chỉ ra rằng có thể vẽ giữa các điểm $n$ đoạn thẳng, mỗi đoạn có một mầu xanh, một mầu đỏ và không có đoạn thẳng nào cắt nhau.

**8.20.** Trên mặt phẳng có $n$ điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng. Hãy chỉ ra rằng có một đường gấp khúc khép kín đi qua tất cả các đỉnh và không tự cắt nhau.

**8.21.** Trên các ô vuông của bảng $3 \times 3$ có điền các số $+1$ và $-1$. Mỗi lượt đi người ta thay lại số của tất cả các ô, mỗi ô thay bằng tích các giá trị của các ô liền cạnh. Như vậy sẽ được một bảng mới. Chứng minh rằng sau một số lần thao tác trên bảng sẽ cho còn toàn số $+1$.

**8.22.** Người ta viết trên đường tròn 4 số 1 và 5 số 0 theo trật tự bất kì. Mỗi lần người ta lại viết vào tất cả khoảng trống giữa hai số chữ số 0 nếu hai số đó bằng nhau và viết chữ số 1 nếu hai số khác nhau. Sau đó xóa đi 9 số trước đó đã được ghi. Cứ tiếp tục như vậy một số lần người ta có thể nhận được tất cả các số 0 hay không? Thao tác này có thể dùng lại khi tất cả các số bằng nhau hay không?

**8.23.** Cho một nhóm $n$ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ trong đó các số $a_i$ có giá trị bằng $+1$ hay $-1$. Thực hiện thao tác sau:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{n-1}a_n, a_na1)$$

Hãy chỉ ra rằng nếu $n = 4$, thực hiện thao tác này một số lần, người ta sẽ nhận được nhóm 4 số toàn số $+1$.

**8.24.** Xét thao tác sau:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (|a_1 - a_2|,\ |a_2 - a_3|, \ldots,\ |a_{n-1} - a_n|,\ |a_n - a_1|)$$

trong đó ai là các số nguyên không âm. Hãy chỉ ra rằng nếu $n = 4$ thì sau một số lần thực hiện thao tác này người ta sẽ nhận được nhóm 4 số 0.

# 9 Gợi ý giải

**1.3** Hàm tình trạng: $a - b$ $(mod\ 3)$. Nếu thực hiện được, thì thực hiện được bằng 1 bước. Nếu số diêm là $a$ và $b$ thì hiệu $a - b$ chia hết cho 3.

**1.4** Hàm tình trạng:= số sỏi còn lại + số đống sỏi hiện có là bất biến. Vứt đi 1 viên thì tăng số đống sỏi tăng thêm một. Như vậy nếu số đống là $x$ thì số sỏi vứt đi là $x - 1$. Số sỏi tổng cộng sẽ là $3x + x - 1 = 4x - 1$. $4x - 1 \neq 1001 \equiv 1$ $(mod\ 3)$.

**1.5** Hàm tình trạng := tổng số bi $\equiv 18 \equiv 2 \neq 100$ $(mod\ 4)$.

**1.6** Không. HTT()=hiệu ô trắng đen. Bất biến.

**2.1** Tô màu chẵn lẻ. HTT()= Hiệu giữa số đĩa ở vị trí số chẵn − số đĩa ở vị trí số lẻ.

**2.3** Số cây sồi lẻ: có thể.
Số cây sồi chẵn − chia hết cho 4: có thể (chia thành hai nhóm mỗi nhóm $\frac{n}{2}$ con ngồi tại hai cây. Sau đó từ một cây sau $\frac{n}{4}$ lượt (2 con/lượt) nhảy sang bên cạnh.
Số cây sồi chẵn nhưng không chia hết cho 4: không thể. Đánh số cây từ 1 đến $n$. Gọi $a$ là số sóc ngồi trên cây số lẻ, $b$ là số sóc ngồi trên cây số chẵn. HTT(): hiệu của hai số $(mod\ 4)$. Hiệu này hoặc không thay đổi, hoặc thay đổi 4 đơn vị .Tức là bất biến $(mod\ 4)$. Lúc đầu $a - b \equiv 0$ $(mod\ 4)$, tình trạng $4k + 2$ $(mod\ 4)$ như vậy không thể xảy ra.

**2.4** Không thể. Sau mỗi bước tổng các số giảm số chẵn đơn vị. Ban đầu là số lẻ.

**2.5** a) không thể. b) Có thể.

**2.6** Dư của tổng các số khi chia cho 17.

**4.2** Mầu trắng. Tính chất lẻ của các hạt đỗ mầu trắng là bất biến.

**6.1** Tính bất biến của tổng các chữ số.

**6.2** Tổng các chữ số bất biến modulo 9.
Số nhận được không chia hết cho 9 (dư 7). Mặt khác $0 = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ chia hết cho 9.

**6.3** Tổng các số bất biến.

**6.5** Tích ba số bất biến.

**6.6** $F(x)$ và $x^2 \cdot f\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ có cùng delta − bất biến. $G(x)$ có delta khác. Không thể được.

**6.7** Delta bất biến.


SĐT: 096 568 5459

**6.8** Không thể.
Nếu ta định trước một hướng cố định sau đó đi quanh chu vi của tam giác và hình chữ nhật theo chiều quay dương. Chỉ chú ý các cạnh có cùng hướng (dương) thì cộng lại và ngược hướng (âm) thì trừ đi. Như vậy tổng này sẽ bất biến với các đa giác khi đã bị chia thành các mảnh và bị tịnh tiến. Trong trường hợp hình chữ nhật, tổng theo mỗi hướng đều bằng 0. Trường hợp hình tam giác có tất cả 6 hướng và các hướng này lần lượt là $a$, $b$, $c$, $-a$, $-b$, $-c$. Rõ ràng hai đại lượng bất biến này không trùng nhau.

**6.9** Xét các số có dạng $a\sqrt{19} + b\sqrt{97}$ với $a$, $b$ hữu tỉ. Đây là các số lập thành một đại số với các phép tính $(+)$, $(-)$ nghịch đảo $(-1)$ (đóng với các phép tính). Tập hợp này không chứa số 1. Vậy không thể tạo giá trị 1.

**6.10** $18 = 21 \cdot 32$. Tính chẵn lẻ của tổng các lũy thừa luôn thay đổi luân phiên theo từng phút – đây cũng là sự bất biến. Lúc đầu tổng nay là số lẻ, sau một phút là số chẵn. Vậy sau 60 phút (60 lần thay đổi) nó quay về số lẻ nhưng $96 = 25 \cdot 31$ có $5 + 1$ là số chẵn. Không thể xuất hiện thời điểm đó.

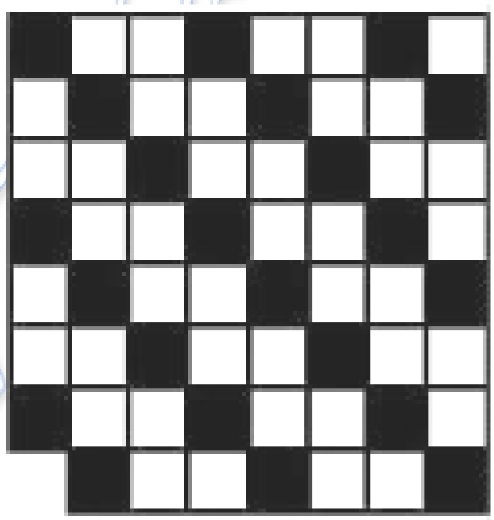
**6.11** Tổng bình phương của ba số bất biến – không thể.

**6.12** Tổng chu vi max của các phần bị cỏ dại là **đại lượng bất biến**. Suy ra không thể.

**6.13** Tại điểm $(-1)$ sự thay đổi của giá trị thay thế là bất biến (giảm đi đúng 1 đơn vị – mỗi lần thay đổi ). Do đó sẽ có đa thức có nghiệm tại $(-1)$ khi đi từ $f(-1) = 11$ đến $g(x) = -9$.

**6.14** Không thể do tổng $S = (a + c + e + g + k) - (b + d + h + f) = 0$ bất biến.

**6.15** Không thể. Bôi đen các ô vuông bàn cờ.



**6.16** Người đi đầu thắng. Chú ý bất biến 4.

**6.18** Sau mỗi bước tổng các số ghi trên đỉnh ngũ giác không thay đổi - bất biến.
Xét $S = (a-c)^2 + (b-d)^2 + (c-e)^2 + (d\breve{\ }a)^2 + (e\breve{\ }b)^2$ Sau khi thay đổi tổng này sẽ là $S' = (a-c)^2 + (-b-d)^2 + (c+b-e)^2 + (d\breve{\ }a-b)^2 + (e+b)^2$ Khi đó $S - S' = -2b(a+b+c+d+e) > 0$ vì $b < 0$, điều đó chứng tỏ rằng $S$ luôn giảm. Vì các số trên đỉnh ngũ giác là các số nguyên. Nên sau hữu hạn bước thì dừng lại $\Leftrightarrow$ chỉ còn các số không âm.

**7.1** Không thể. Số mảnh có dạng $24 + 9k$.

**7.2** Không thể . Tổng các số trên bảng luôn là số lẻ.

**7.3** Số các số 0 luôn là chẵn (bất biến). Vậy bước thứ 98 chỉ còn 2 số 0. Bước thứ 99 sẽ còn lại số 1.

**7.4** Sai. Số mảnh tăng lên là bội của 5. Do đó số mảnh giấy chia 5 luôn dư 1.

**7.5**

i) Số 191. Sau mỗi lần tổng các số trên bảng giảm 1 đơn vị (giảm bất biến).

ii) $21! - 1$. Nếu các số trên bảng là $a_1, a_2, ..., a_n$ thì giá trị: $S = (a_1 + 1)(a_2 + 1)....(a_n + 1)$ luôn không đổi. Vậy sau lần cuối cùng kết quả sẽ là $S - 1$.

**7.6** Mầu trắng. Tính chất lẻ của các hạt đỗ mầu trắng là bất biến.

**7.7** Quả chuối.

**7.8** Không. Vì số đứng ở giữa phải bằng tổng 4 số đứng ở 4 bốn góc.

**7.9** Không thể. Vì hiệu hai nắm diêm biến đổi $3k$ đơn vị. Tức là $S = a - b$ bất biến.

**7.10** Tổng số diêm $S = a + b + c$ thay đổi $3k$ đơn vị mỗi lần. (Số dư khi chia cho 3 bất biến.

**7.11** Không thể. Đại lượng $S = (a + c) - (b + d)$ chia cho 3 có số dư bất biến.

**7.13** Không thể. Vì như vậy bước trước đó sẽ là toàn số 1 và như vậy trước đó chỉ có thể là $1, 0, 1, 0, ....$ tức có số chẵn các chữ số. Nhưng 9 là số lẻ.

**7.14** Không thể. Đánh dấu mỗi cây theo thứ tự $1, 2, ..., 44$. Gọi i.ai là giá trị của cây thứ $i$ khi có ai con sóc. $S$ là tổng các giá trị các cây. Tổng này lúc đầu là $44 \cdot \frac{45}{2}$ là số lẻ. Sau mỗi lần chuyển động tổng này thay đổi một giá trị chẵn. Không thể thành $44 \cdot i$ là một số chẵn.

**8.1** Số sỏi và số đống sỏi trên mặt bàn bất biến ($1001+1 = 1002$) không chia hết cho $3n+n = 4n$.

**8.2** Thực hiện được. Lập hàm tình trạng (sự chuyển đổi luôn làm giảm thực sự số sai lệch).

**8.3** Không thể .Tích của các ô bất biến.

**8.4** Không thể. Trong bảng tổng các ô đứng ở các hàng $2, 3, 5$ và $6, 7, 8$ luôn tăng một lượng $3k$.

**8.5** Không thể. Xét hàm số $S(a, b, c, d, e, f) = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + 12f$. Hàm này thỏa mãn tính chất: $S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)x_1$, và $S(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ có chữ số cuối cùng giống nhau. Mặt khác $S(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18$ và $S(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 24$ các số này chữ số cuối cùng không giống nhau. Vô lý.