TS. Nguyễn Văn Lợi

7 bài toán cơ bản của

KHOA HỌC MÁY TÍNH

Phần I.

Chương trình bồi dưỡng và phát triển năng lực

ĐỒNG HÀNH CÙNG

LOISCENTER

Mục đích:

Trước 18 tuổi được trang bị kiến thức

- Khoa học Toán - Máy tính
- Kỹ năng lập trình code - hệ thống
- Toán kinh tế - MBA

Đầu tư cho tương lai – Thông minh nhất – Hiệu quả nhất

Đôi lời chia sẻ

Chỉ 10 – 20 năm nữa khi làn sóng công nghệ 4.0 sẽ định hình lại cấu trúc cuộc sống và xã hội. Cái đói nghèo đã được trả về cho quá khứ, lúc đó lao động không còn là để tồn tại mà chủ yếu nhằm mục đích sáng tạo và tiến bộ.

Các công việc sẽ tập trung vào 4 nhóm:

- Nghệ thuật
- Khoa học kỹ thuật
- Dịch vụ
- Sức khỏe và Thể thao

Tùy thuộc khả năng, con người có thể lựa chọn các thể loại công việc phù hợp. Nhưng bất kì công việc gì yếu tố sáng tạo và thi đua sẽ được đưa lên hàng đầu.

Chúng tôi chọn công việc chuẩn bị hành trang *tri thức khoa học kỹ thuật* cho lớp công dân thời đại 4.0 làm nhiệm vụ chính của mình.

Mục lục

Hà Nội, ngày 1 tháng 3 năm 2019

Phần I

Từ định lý Hall, định lý Konig đến lý thuyết phân phối ổn định

Trong bài viết này chúng ta tiếp cận các kết quả nổi tiếng của lý thuyết kết đôi và lý thuyết phân phối ổn định qua nhiều góc độ. Các lý thuyết này đang được khai thác và sử dụng rộng rãi trong cuộc sống. Các kết quả toán học liên quan được nghiên cứu trên phương châm dạy được và học được đối với các thầy cô và các bạn học sinh phổ thông.

Trong bài báo này chúng ta quan tâm đến Định lý Konig [9], định lý Hall[5] và các vấn đề đi kèm. Đầu tiên các định lý này được khai thác như hai đề tài biệt lập với những chứng minh tinh tế và mẫu mực của riêng mỗi đề tài. Sau đó cả hai đề tài được nối với nhau bằng chứng minh sự tương đương của chúng. Phát hiện này mang một thông điệp về khả năng tiềm ẩn của ứng dụng. Lý thuyết ghép đôi [8] chính là tổng hợp của các thành tựu nghiên cứu toán học của đề tài này. Và cuối cùng là một minh chứng Nobel: bên cạnh nhà toán học luôn cần có một nhà kinh tế [11], người sẽ thổi hồn cho những lý thuyết khó nhai này để nó bừng tỉnh các ứng dụng thực sự trong cuộc sống.

1 Một số khái niệm

Các kiến thức cơ bản về tổ hợp và đồ thị xin trích dẫn trong các tài liêu [8] (tiếng Anh) [6] (tiếng Hungarie) và [13] (tiếng Việt). Sau đây ta chỉ liệt kê những khái niệm cơ bản nhất.
Các định nghĩa khái niệm và kết quả chỉ giới hạn trong các tập hợp hữu hạn.
Đồ thị: $G(V, E)$ là một tập hợp gồm V đỉnh và E cạnh ($E \in V * V$). Ở đây ta chỉ xét đơn đồ thị vô hướng.
Đồ thị lưỡng phân hay đồ thị hai phía (Bipartite graph): $G(A, B; E)$ là đồ thị mà tập các đỉnh có thể chia thành hai tập đỉnh sao cho các cạnh chỉ chạy giữa hai tập đỉnh này (giữa A và B).
Kết đôi (Matching): trong đồ thị lưỡng phân $G(A, B; E)$, một kết đôi là một tập các cạnh thuộc E sao cho không có hai cạnh nào có chung đỉnh.

Những định lý thuộc dạng MINI-MAX là những định lý phát biểu giá trị cực đại của một tập hợp bằng giá trị cực tiểu của tập kia.
Tất cả các phần tử của một tập các số thực $\leq$ nhỏ hơn hoặc bằng tất cả các phần tử của một tập số thực khác và chúng có phần tử chung, thì tập hợp thứ nhất có giá trị cực đại, tập thứ hai có giá trị cực tiểu và hai giá trị này bằng nhau.
Nguyên lý này được sử dụng triệt để trong các chứng minh của các bài toán có yếu tố ghép đôi. Tất nhiên tồn tại những kết quả không thuộc dạng những định lý Mini-Max, ví dụ như định lý Gallai [4] chúng ta cũng sẽ làm quen dưới đây.

2 Định lý Konig và thuật toán Hungary

Chúng ta bắt đầu bằng một đề tài thú vị. Trong một mạng lưới giao thông tổng số điểm tối thiểu để có thể theo dõi lưu lượng xe cộ trên từng đoạn đường nối hai địa danh. Vấn đề này được mô hình hóa và trở thành bài toán đồ thị quan trọng.

Ký hiệu $G(V, E)$ là một đồ thị mà ở đó tập hợp các đỉnh V là các địa danh, E là tập hợp các cạnh (đường nối các địa danh). Người ta thường ký hiệu $V(G) = |V|$ (số các đỉnh), $E(G) = |E|$ (số các cạnh).
Tập $V' \subseteq V$ gọi là *tập điểm độc lập* nếu bất kì hai điểm nào của nó đều không được nối trực tiếp với nhau (các điểmcó cạnh móc không là phần tử của tập điểm độc lập).
Tập điểm chặn (blocking set) $V' \subseteq V$ là một tập mà bất kì cạnh nào của đồ thị cũng có ít nhất một đầu là điểm thuộc V'.
Tập các cạnh $E' \subseteq E$ được gọi là độc lập (kết đôi) nếu hai cạnh bất kì không có đỉnh chung (các cạnh móc không là phần tử của bất kì tập cạnh độc lập nào).
Tập các cạnh $E' \subseteq E$ gọi là *tập phủ* nếu bất kì điểm nào của G cũng là đỉnh của một cạnh nào đó trong V'.
Những định nghĩa quan trọng:

- Tập điểm độc lập: $\alpha(G)$ số phần tử của tập điểm độc lập cực đại (max).
- Tập điểm chặn: $\iota(G)$ số phần tử của tập điểm chặn cực tiểu (min).
- Tập cạnh độc lập: $\gamma(G)$ số phần tử của tập cạnh độc lập cực đại (max).
- Tập cạnh phủ: $\rho(G)$ số phần tử của tập cạnh phủ cực tiểu (min).

Qua quá trình chứng minh ta sẽ nhận thấy các giá trị min, max không phụ thuộc vào cách chọn và các tập được chọn.
Một số kết quả hiển nhiên suy từ định nghĩa.

Hệ quả 2.1. *a) $\gamma(G) \leq \iota(G)$: số cạnh độc lập cực đại (max) $\leq$ số điểm chặn cực tiểu (min)*

b) $\alpha(G) \leq \rho(G)$: số điểm độc lập cực đại (max) $\leq$ số cạnh phủ cực tiểu (min).

Chứng minh.

a) Giả sử M là một tập cạnh độc lập cực đại. Chỉ với việc chặn các cạnh này đã cần $|M| = \gamma(G)$ điểm. Suy ra $\iota(G) \geq |M| = \gamma(G)$.

b) Tương tự.

□

Định lý 2.1 (Gallai [4]. *,1912-1992]*

a) Với mọi đồ thị không có cạnh móc: $\alpha(G) + \iota(G) = V(G)$
Số điểm độc lập cực đại + số điểm chặn cực tiểu = số điểm của đồ thị.

b) Với đồ thị không chứa điểm cô lập: $\gamma(G) + \rho(G) = V(G)$
Số cạnh độc lập cực đại + số cạnh phủ cực tiểu = số điểm của đồ thị.

	Độc lập		**Cực tiểu**		
	↓		↓		
Đỉnh	**α(G)**	+	**τ(G)**	=	**ν(G)**
	∧|		∨|		
Cạnh	**ρ(G)**	+	**γ(G)**	=	**ν(G)**
	↑		↑	**(Không chứa điểm cô lập)**	
	Phủ (chặn)		**Cực đại**		

Chứng minh.

a) Phần bù của tập điểm độc lập là tập điểm chặn và ngược lại, phần bù của tập điểm chặn là tập điểm độc lập. Thật vậy, nếu X không độc lập, thì trong X có 2 điểm được nối với nhau bằng một cạnh, rõ ràng $V(G)\backslash X$ không chặn cạnh này. Ngược lại, nếu $V(G)\backslash X$ không chặn một cạnh nào đó (tất nhiên không là cạnh móc), thì cả hai đầu của cạnh này nằm trong X và như vậy X không còn là tập đỉnh độc lập. Từ đó $\iota(G)+\alpha(G)\leq|V(G)|$. Tương tự $\alpha(G)\geq|V(G)\backslash Y|$ với mọi Y là tập đỉnh chặn. Suy ra $\iota(G)+\alpha(G)leq|V(G)|$.

b) Một tập các cạnh độc lập X có $\gamma(G)$ cạnh sẽ phủ $2\cdot\gamma(G)$ điểm riêng biệt. Các điểm còn lại tất nhiên sẽ được phủ bằng $|V(G)|-\gamma(G)$ cạnh (vì không có điểm cô lập). Do đó $|V(G)|-\gamma(G)\geq\rho(G)$. Mặt khác, nếu Y là một tập cạnh phủ cực tiểu thì Y sẽ là một tập hợp của các ngôi sao dời dạc nhau (giả sử có k ngôi sao), vì nếu Y có chứa vòng tròn hoặc một đường đi có độ dài 3, thì luôn bỏ đi được một cạnh và các cạnh còn lại vẫn phủ được toàn bộ các điểm, trái với điều kiện Y là tập cạnh phủ cực tiểu. Như vậy $\rho(G)=|V(G)|-k$. Từ mỗi ngôi sao ta chọn một cạnh, thì các cạnh này sẽ hoàn toàn độc lập. Do đó $\gamma(G)\leq k=|V(G)|-\gamma(G)$.

□

Định lý 2.2 (Konig[9]**.** *(1935)] Cho $G(A,B,E)$ là đồ thị hai phía. Khi đó:*

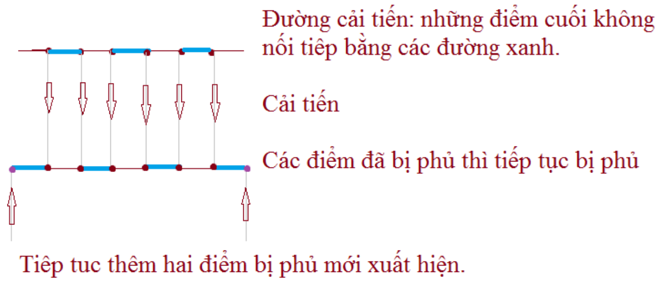
a) $\upsilon(G)=\rho(G)$: Số cạnh độc lập cực đại bằng số điểm chặn cực tiểu.

b) $\alpha(G)=\rho(G)$: Số điểm độc lập cực đại (max) = số cạnh phủ cực tiểu (min) nếu đồ thị không chứa điểm cô lập.

Điều kiện không có điểm cô lập là tự nhiên, vì nếu có điểm cô lập thì không có hệ các cạnh phủ.
Ta sẽ chứng minh định lý này bằng thuật toán nổi tiếng mang tên **thuật toán Hungary[7], [8].** Thuật toán được tìm ra bởi các nhà toán học Hungary Konig Denes và Egervari Jeno, vì thế các nhà toán học thế giới dùng luôn tên nước để gọi thuật toán nổi tiếng này.
Một số bước chuẩn bị cho thuật toán.
Đường xen kẽ F **(alternating path)** :Trong đồ thị G, có F là một hệ kết đôi (tập cạnh độc lập). Khi đó những đường đi mà các cạnh thay đổi nhau theo quy luật một cạnh không thuộc F nối tiếp một cạnh thuộc F được gọi là đường xen kẽ của F. Chỉ một cạnh (không cô lập) cũng là đường xen kẽ.
Đường cải tiến **(augmenting path)**: Trong đồ thị G, có F là một hệ kết đôi (tập cạnh độc lập). Khi đó đường xen kẽ $-F$ được gọi là *đường được cải tiến* $-F$ nếu cạnh đầu tiên và cạnh cuối cùng không thuộc F. Cạnh (nhưng không là móc) là đường cải tiến nếu các điểm cuối của

nó không nối tiếp cạnh thuộc F.

Thuật Toán Hungary.
1. Xuất phát một tập rỗng (chưa có cạnh nào) ta lấy lần lượt các cạnh vào tập hợp này sao cho các cạnh được lấy vào độc lập với các cạnh đã lấy. Tiếp tục như vậy cho đến khi nào có thể.
2. Khi đã không thể lấy thêm được vào tập cạnh độc lập (theo cách lấy dĩ nhiên đây sẽ là một đồ thị hai phía), ta hãy tìm các đường cải tiến. Nếu gặp những đường như vậy, ta thực hiện việc đổi đường đi cũ bằng đường đi mới. (Ví dụ từ đường xen kẽ ....−−....−−....−−.... đổi thành đường −−....−−....−−.... −−).
Các bước thay đổi này luôn giữ được tính độc lập của tập các cạnh. Khi thuật toán dừng lại không còn cạnh độc lập với các cạnh đã chọn. Ghi chú rất quan trọng này sẽ được dùng đến trong quá trình chứng minh.



Chứng minh. Chúng ta sẽ dùng nguyên lí Mini-Max để giải bài toán này.
Max $\{x$: x mầu xanh $\}$ = [Min $\{x$: x mầu đỏ $\}$ $\Leftrightarrow \forall x \in$ Xanh $\forall y \in$Đỏ $(x \leq y)$] $\wedge$[Xanh $\cap$ Đỏ $\neq \emptyset$]. Hai đẳng thức cần chứng minh: $\upsilon(G) = \iota(G)$ và $\alpha(G) = \rho(G)$ thực chất sẽ là Max$|\{$kết đôi (cạnh độc lập)$\}|$ = Min $|\{$tập điểm chặn$\}|$ và **Max**$|\{$**tập điểm độc lập**$\}|$ = **Min** $|\{$**tập cạnh phủ**$\}|$.

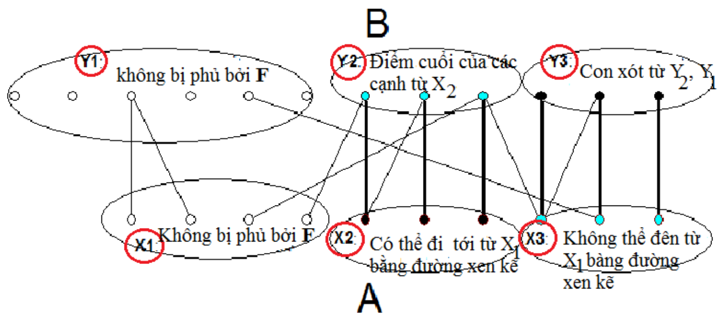
1)Số cạnh của tập cạnh độc lập (kết đôi) tối đa chỉ có thể bằng số lượng của một tập điểm chặn nào đó. Số lượng củamột tập điểm độc lập không thể vượt quá số lượng của bất kì một tập cạnh phủ nào.(ghi chú rằng một tập các cạnh phủ chỉ tồn tại nếu graph không có điểm cô lập.)
Tất cả các tập cạnh/điểm độc lập khi chặn cần có một phần tử từ bên chặn/phủ tham gia. Các cái khác nhau (cạnh/đỉnh) không thể đồng thời chặn được bằng một phần tử. Điều này không chỉ đúng với graph hai phía.

2)Nhiệm vụ của ta là phải chứng minh:
− Có tập cạnh độc lập , mà số lượng các cạnh của nó bằng số lượng của một tập điểm chặn. (Điều nay không hoàn toàn đúng với graph không là hai phía. Hoặc trong graph cho phép có đỉnh cô lập).

a) Có tập các điểm độc lập, mà số lượng của nó đúng bằng số lượng của một tập các cạnh phủ nào đó (để chứng minh điều này cần phải có thêm điều kiện là graph không chứa điểm cô lập, vì nếu có thì ngay cả tập cạnh phủ cũng không tồn tại).
   Có ghép đôi − gọi là F − sao cho không tồn tại đường được cải tiến (không thể sửa tốt hơn được nữa) (cạnh độc lập cũng là đường cải tiến).

Bắt đầu từ một tập rỗng, ta lấy tất cả các cạnh độc lập cho đến khi có thể. Sau đó tìm lấy tất cả các đường cải tiến, và thực hiện thay đổi cạnh. Khi không thể tiếp tục công việc này, tập cạnh độc lập hình thành và tập đó chính là F.
Việc lấy vào thêm các cạnh độc lập, sự thay đổi các cạnh trong quá trình cải tiến của đường, mỗi lần như vậy thêm 2 điểm mới bị chặn bên cạnh các điểm cũ vẫn tiếp tục bị chặn không thay đổi. Do đó nếu một cạnh đã không độc lập, thì về sau cũng sẽ luôn không độc lập, và trong tập cạnh độc lập F cuối cùng sẽ không có đường cải tiến (cũng không cả là cạnh độc lập nữa).

b) Ta xét các tập trợ lực cho quá trình chứng minh:
$X_1 := \{v \in A | v$ không là điểm cuối của bất kì cạnh nào của $F\}$
$Y_1 := \{v \in B | v$ không là điểm cuối của bất kì cạnh nào của $F\}$
$X_2 := \{v \in A \backslash X_1 \ | v$ có thể đến được từ X_1 qua đường xen kẽ $\}$
$Y_2 := \{v \in B \backslash Y_1 |$ Những điểm thuộc B và là điểm cuối của những cạnh thuộc F phủ các điểm X_2 $\}$ $X_3 := A \backslash (X_1 \cup X_2)$ $Y_3 := B \backslash (Y_1 \cup Y_2)$



c) $Y_2 \cup X_3$ là tập điểm chặn, vì:
Có thể loại sự tồn tại của tất cả các cạnh được nối giữa các tập điểm khác nhau được định nghĩa trên kia.Các cạnh cũng không thể hoặc nằm trong các tập X hoặc Y vì đây là graph hai phía.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">o</td><td colspan="3">B</td></tr>
<tr><td>Y_1</td><td>Y_2</td><td>Y_3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td>X_1</td><td>tồn tại cạnh độc lập ngoài F</td><td></td><td>Có đường xen kẽ từ X_1 đến X_3</td></tr>
<tr><td>X_2</td><td>Có đường cải tiến</td><td></td><td>Có đường cải tiến từ X_1 đến X_3</td></tr>
<tr><td>X_3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ta đã biết F là tập cạnh độc lập (kết đôi)
Số lượng của chúng bằng nhau, vì
$|F| = |A \backslash X_1| = |X_2 \cup X_3| = |Y_2| + |X_3| = |Y_2 \cup X_3|$
đến đây ta đã chứng minh được
$\upsilon(G) = \iota(G)$: *Số cạnh độc lập cực đại bằng số điểm chặn cực tiểu.*

d) $X_1 \cup X_2 \cup Y1 \cup Y_3$ là tập điểm độc lập vì II. 3. A).

Tập cạnh F bổ sung thêm những cạnh xuất phát từ các điểm của Y_1và X_1 sẽ là tập cạnh phủ, (chúng ta có thể bổ sung vì theo giả thiết đồ thị không có điểm cô lập).
Theo định nghĩa của các tập X_1 và Y_1, các tập hợp $A\backslash X_1$ và $B\backslash Y_1$ bị phủ bởi các cạnh thuộc F, các điểm thuộc các tập X_1 và Y_1 được phủ bởi các cạnh đã chọn bổ sung.
Số lượng các phần tử của hai tập này trùng nhau, vì
Số lượng các cạnh phủ là $|F|+|Y_1|+|X_1|$, số lượng các điểm độc lập là $|X_1|+|X_2|+|Y_1|+|Y_3|$; các cạnh của F tạo nên song ánh giữa $X_2 \leftrightarrow Y_2$và $X_3 \leftrightarrow Y_3$. Và trong các tương ứng song ánh này tất cả các cạnh của F đều tham gia. Do đó $|F| = |X_2| + |Y_3|$ và từ đó ta có
$\alpha(G) = \rho(G)$: *số điểm độc lập cực đại = số cạnh phủ cực tiểu* .
Với định nghĩa của các số $\alpha(G), \iota(G), \upsilon(G), \rho(G)$ định lý được CM. □

Định lý Konig cho lời giải và cả thuật toán giải quyết thỏa đáng vấn đề giao thông đã được đặt ra.

3 Định lý hall (1935)

Một trong những kết quả đẹp nhất của toán rời rạc là Định lý Hall, còn có tên là định lý Hôn nhân hòa thuận. Định lý này cùng định lý Konig có tầm quan trong quyết định cho sự phát triên của lý thuyết cân ghép đôi và các ứng dụng rộng dãi của nó trong thực tế.
T là một tập hợp. $T_i (i = 1, \ldots, n)$ là các tập con của T.

Định nghĩa 1. Hệ các đại diện phân biệt (SDR) là tập n phần tử phân biệt $t_1, t_2, \ldots, t_n$ của hệ thống các tập hợp $T_1; T_2; \cdots; T_n$ sao cho $t_i \in T_i$ với tất cả $1 \leq i \leq n$.

Định nghĩa 2. Những hệ tập hợp $T_i (i = 1, \ldots, n)$ có tính chất $|\cup T_i| \geq |I_i|$ với I_i là tập con của tập $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ thường được gọi là hệ tập hợp thỏa mãn điều kiện Hall.

Định lý 3.1 ([5]. *(Hall - 1935)] Dãy các tập con $T_1; T_2; \ldots; T_n$ của tập hữu hạn T có hệ các đại diện phân biệt nếu nó thỏa mãn điều kiện Hall ($|\cup T_i| \geq |I_i|$với I_i là tập con của tập $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$).*

Chứng minh. Ta dễ dàng thấy rằng điều kiện Hall là điều cần: Nếu hệ tập hợp $T_1; T_2; \ldots; T_n$ có hệ đại diện phân biệt nhưng điều kiện Hall không thỏa mãn, khi đó tồn tại một hợp của k tập hợp nào đó mà số lượng các phần tử nhỏ hơn k. Mặt khác vì mỗi tập con có đại diện phân biệt, nên hợp của các tập con này sẽ có ít nhất k phần tử − mâu thuẫn xảy ra.
Ta chứng minh điều kiện đủ bằng quy nạp. (Tham khảo chứng minh này từ sách Proofs from the book của **Aigner và Ziegler[1]**).
Với $n = 1$ hiển nhiên. Giả sử $n > 1$ hệ tập hợp $T_1, T_2, \cdots, T_n$ thỏa mãn điều kiện Hall - kí hiệu là (H). Một hệ gồm l tập hợp $A_1; A_2; \cdots; A_l 1 \leq l < n$ (trong đó A_k được chọn từ $\{T_j\}$) là một hệ *"tới hạn"* nếu hợp của chúng có đúng l phần tử. Ta sẽ phân thành hai trường hợp.

Trường hợp 1. Không tồn tại hệ tới hạn.
Ta chọn một phần tử x bất kì từ T_n. Loại bỏ phần tử x ra khỏi tập T. Xét hệ tập hợp $T'_1, T'_2, \cdots, T'_{n-1}$ sao cho $T' = T_i \{x\}$. Vì không tồn tại hệ tập hợp con tới hạn nào, cho nên bất kì hệ con k phần tử T'_k đều chứ ít nhất k phần tử ($(k + 1) - 1 = k$). Do đó theo giả thiết quy nạp tồn tại hệ đại diện phân biệt $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ cho hệ tập hợp $T'_1, T'_2, \cdots, T'_{n-1}$. Ghép thêm $t_n = t$ ta được hệ đại diện phân biệt cho $T_1; T_2; \cdots; T_n$.

Trường hợp 2. Tồn tại hệ tới hạn.
Sau khi đánh dấu là các tập hợp con, không mất tổng quát ta có thể giả sử rằng hệ tập $\{T_1, T_2, \cdots, T_l\}$ là tới hạn. Như vậy kí hiệu $\cup T_i(i+1 \to l) = V$ khi đó $|V| = l$. Vì $l < n$ theo giả thiết quy nạp ta có hệ đại diện phân biệt $t_1, t_2, \cdots, t_l$ cho hệ $\{T_1, T_2, \cdots, T_l\}$ trong đó $t_i \in V, 1 \leq i \leq l$. Xét các tập con còn lại $\{T_{l+1}, T_{l+2}, \ldots, T_n\}$. Từ đây lấy k tập con bất kì, giả sử $T_{l+1}, T_{l+2}, \cdots, T_{l+k}$. Khi đó với

$$V_{l+1} = T_{l+1}\ V, \ldots, V_n = T_n\ V$$

$$l + k \leq |\cup T_i : i \leq l + k| \leq |\cup T_i : i \leq l| + |\cup V_i : l + 1 \leq i \leq l + k|$$

từ đó $k \leq |cupV_i : l + 1 \leq i \leq l + k|$, suy ra $V_{l+1}, \cdots, V_n$ thỏa mãn điều kiện Hall. Bổ sung hai hệ đại diện phân biệt này, ta được điều phải chứng minh. □

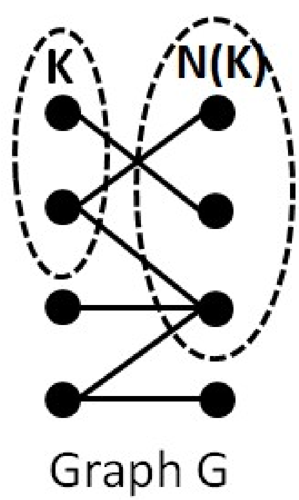
Như chúng ta đã từng nhắc tới, Định lý Hall mở đầu cho sự hình thành và phát triển mạnh mẽ của lý thuyết ghép đôi (hay còn gọi là lý thuyết cân bằng). Với phát biểu dưới dạng ghép đôi tìm vợ tìm chồng chúng ta có một góc nhìn thực tiễn và sinh động, minh họa nội dung và các khả năng ứng dụng tiềm tàng của định lý.

Có m người đàn ông và n người đàn bà. Nhóm các đàn ông và nhóm các đàn bà sẽ được tương ứng như hệ tập hợp $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ và hệ $t_1, t_2, \cdots, t_n$. Để giúp cho đàn ông sớm tìm được người đàn bà thích hợp làm vợ, người ta đề nghị những người đàn ông lập danh sách nhưng người đàn bà mà mình ưng ý theo thứ tự từ trên xuống. Người đàn bà t_i nằm trong danh sách T_j nếu người đàn ông thứ j thích cô ta. Các người đàn ông sẽ chọn được vợ khi và chỉ khi với bất kì một nhóm k người đàn ông nào, số đàn bà có trong tổng danh sách của họ lớn hơn hoặc bằng k. Hệ đại diện phân biệt cho chúng ta đảm bảo khả năng chọn vợ của các người đàn ông và cũng đảm bảo chế độ một vợ một chồng.

Như ta đã định nghĩa trong một đồ thị hệ ghép đôi là một tập hợp con của $E(G)$ (cạnh của G) mà không có bất kỳ hai cạnh nào có đỉnh chung. Nó thường cũng gọi là tập các cạnh độc lập.

Định nghĩa 3. Hệ ghép đôi được gọi là đồng khắp trên các đỉnh nếu mỗi đỉnh đều có trên một cạnh nào đó của một hệ ghép đôi.

Tập *hàng xóm liền kề* $N(K)$ của các đỉnh thuộc $K \subseteq A$ trong đồ thị $G(A, B, E)$ là tập hợp các đỉnh của B tham gia tạo thành cạnh với đỉnh từ K.
Ví dụ minh họa:

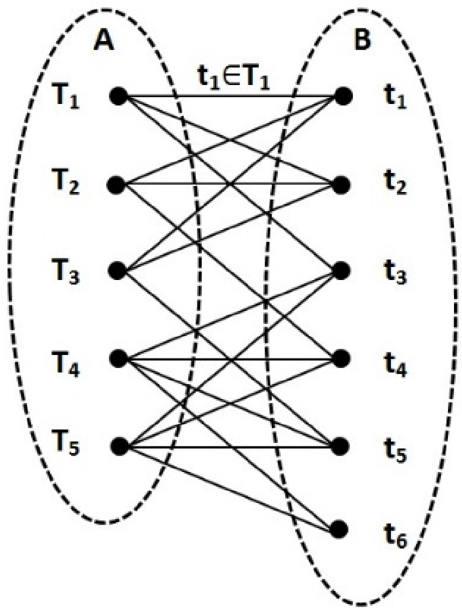


Định lý 3.2 (Định lý Hall − Lý thuyết đồ thị). *Giả sử $G = (A, B, E)$ là một đồ thị hai phía. Đồ thị G có một hệ ghép đôi đồng khắp trên A khi và chỉ khi*

$$|N(K)| \geq |K| vimi K \subseteq A.$$

$|N(K)| \geq |K|$ với mọi $K \subseteq A$ là biểu diễn của điều kiện Hall dưới dạng lý thuyết đồ thị.

Chứng minh. Để chuyển đổi định lý từ dạng lý thuyết tập hợp sang dạng lý thuyết đồ thị, ta kí hiệu $T_1, \cdots, T_n$ các đỉnh trong A, và phần tử t_i thuộc $T_i, 1 \leq i \leq n$ kí hiệu các đỉnh trong $B.(T_i, t_j)$ là cạnh của đồ thị nếu t_j thuộc T_i.



Theo điều kiện Hall, nếu chúng ta có thể chọn bất kỳ $k \leq n$ các tập hợp T_i thì hợp của chúng có chứa ít nhất các k phần tử, do đó T_i có một tập hợp các đại diện khác nhau. Tương tự , nếu chúng ta có thể chọn bất kỳ $K \subseteq A$ với $|N(K)| \geq |K|$,do điều kiện Hall của mỗi đỉnh trong A sẽ được ghép bởi các cạnh tới các đỉnh riêng biệt của B, tạo thành một hệ đại diện phân biệt của A và hệ này đồng khắp trên A. Ngược lại, các tập hợp tách rời A và B của một đồ thi hai phía $G(A, B, E)$ xác định một chuỗi các bộ T_i và các phần tử t_j của nó và các cạnh tương ứng là các mối quan hệ $t_j \in T_i$, sẽ có một hệ đại diện phân biệt. □

Trong vấn đề hôn nhân của chúng ta, người đàn ông tương ứng bởi các đỉnh A và phụ nữ theo các đỉnh trong B. Một đỉnh trong A được kết nối với một đỉnh trong B nếu người đàn ông tương ứng đó có người phụ nữ thích ứng trên danh sách của mình. Hệ ghép đôi không có bất kỳ đỉnh chung là đảm bảo chỉ được phép có những cuộc hôn nhân một vợ một chồng. Nếu A đồng khắp, có nghĩa là tất cả những người đàn ông đã tìm được một người bạn đời theo yêu cầu. Do đó, tính đồng khắp của A là tương đương với T_i có một hệ thống các đại diện phân biệt.

Tương thích hôn nhân biểu diễn dạng ma trận.

Các hình thức ma trận của định lý Hall không được sử dụng rộng rãi như các dạng lý thuyết tập hợp hay lý thuyết đồ thị, vì các dạng này đã được chứng tỏ có khả năng áp dụng hữu hiệu hơn trong các vấn đề thực tế. Tuy nhiên, về mặt lý thuyết nó rất hữu ích để nhìn nhận các phiên bản từ lý thuyết tập hợp của định lý Hall có thể được chuyển đổi dễ dàng thành một ma trận $(0, 1)$, áp dụng để phát triển các chứng minh một số lý thuyết quan trọng khác.

Định lý 3.3 (Dạng Matrix của định lý Hall)**.** *Gọi M là một ma trận $m \times n$ của* 0 *và* 1*. Khi đó có thể chọn trong mỗi hàng của M một phần tử* 1*, sao cho không có hai trong số các phần tử này nằm trong cùng một cột, khi và chỉ khi với mọi k hàng của M , trong đó $1 \leq k \leq n; m$, có ít nhất là k cột có chứa phần tử* 1*.*

Chứng minh sau được xây dựng trên cở cở biến đổi của định lý Hall từ dạng lý thuyết tập hợp sang dạng Matrix.

Chứng minh. Cho $ME = (m_{ij})$ là ma trận $m \times n$, sao cho $m_{ij} = 1$ nếu $t_j \in T_i$ và bằng 0 nếu ngược lại.Ví dụ: Cho $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ với $T_1 = \{1, 2\}, T_2 = \{3, 4\}, T_3 = \{3\}$và $T_4 = \{1, 4\}$. Ta định nghĩa một matrix liên kết hàng xóm liền kề như sau:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó, trong mỗi hàng của ma trận tương ứng với các T_i . Mỗi cột tương ứng với các phân tử t_j. Giá trị tại (i, j) sẽ là 1 nếu $t_j \in T_i$, và bằng 0 trong trường hợp ngược lại.
Bằng cách biểu diễn trên ta chỉ ra sự tương ưng $1 - 1$ giữa dạng tập hơp và dạng matrix của của bài toán. Việc chọn được các giá trị $(i, j) = 1$ trên các điểm của matrix sao cho không có 2 điểm nào hoặc chung hàng hoặc chung cột tương ứng với chọn được hệ đại diện phân biệt của tập hợp $\{T_i\}$ và ngược lại. □

Đơn cử ví dụ về kết hôn bền vững, người đàn ông sẽ được tương ứng bởi các hàng trong ma trận và nữ tướng ứng với các cột của ma trận. Nếu người phụ nữ thứ j có trong danh sách của người đàn ông thứ i mục m_{ij} tương ứng sẽ là 1, 0 nếu ngược lại. Việc lựa chọn thành công các giá trị 1 cho các điểm m_{ij} sao cho không có giá trị 1 được chọn có chung hàng hay cột đối với giá trị 1 khác. Điều này chứng tỏ luật một chồng một vợ được đảm bảo, và mỗi người đàn ông đều chọn được nguời vợ duy nhất cho mình. Luật hôn nhân sẽ thực thi nếu điều kiện Hall thỏa mãn.

4 Sự tương đương của định lý Hall và Định lý Konig

Trong công trình của mình (năm 1935) P. Hall cũng có nhắc đến sự tương đương của định lý Hall và định lý Konig nhưng không chứng minh. Trong phân này chúng ta sẽ chỉ ra sự tương đương của hai định lý. Hai đinh lý gọi là tương đương được hiểu là công nhận kết quả định lý kia ta chứng minh được định lý này và ngược lại. Nhiều khi các mệnh đề trong các định lý không tương đương (vì phát biểu với các mục đích và kết quả khác).
Trong định lý Hall ta cần đến khái niệm điều kiện (H) và hệ đại diện phân biệt (SDR). Trong định lý Konig các khái niệm $\alpha(G), \iota(G), upsilon(G), \rho(G)$ đóng vai trò chủ đạo. Chúng ta giữ nguyên định nghĩa của các khái niệm này trong quá trình chỉ ra sự tương đương của hai định lý.

Định lý 4.1. *Định lý Hall và định lý Koniglà tương đương.*

Chứng minh. 1)Hall $\rightarrow$ Konig. Được chứng minh thông qua dạng đồ thị của định lý Hall.
Trước tiên ta chứng minh với G là một đồ thị hai phía thì:

a) $\upsilon(G) = \iota(G)$: Số cạnh độc lập cực đại bằng số điểm chặn cực tiểu.
$\upsilon(G) \leq \iota(G)$ là hiển nhiên, vì không có hai cạnh nào của $\upsilon(G)$ có điểm chung trong $\iota(G)$ và cạnh nào trong $\upsilon(G)$ cũng có một đỉnh trong $\iota(G)$.Bây giờ chúng ta phải chỉ ra rằng tồn tại một tập đỉnh chặn C có số các điểm bằng đúng số cạnh của một kết đôi M. Nếu tồn tại một tập đỉnh chặn C như vậy, thì $|C| = \iota(G)$ và M phải là một ghép đôi maximum $|M| = \upsilon(G)$ ở đây $G = G(A, B, E)$.
Kí hiệu $C_A = C \cap A$ và $C_B = C \cap B$. Vì G là một đồ thị hai phía nên không có cạnh giữa $A \backslash C_A$ và $B \backslash C_B$. Tiếp tục xét các tập hợp $H_1 = C_A \cup (B \backslash C_B)$ và $H_2 = C_B \cup (A \backslash C_A)$. Giả sử $K \subseteq C_A$. Nếu $|K| > |H_1 \cap N(K)|$ (ở đây $H_1 \cap N(K)$ chính là các hàng xóm liền kề của K nằm trong H_1. Khi đó tập các đỉnh $C_B \cup (C_A \backslash K) \cup (H_1 \cap N(K))$ là một tập điểm chặn có kích thước nhỏ hơn, vì C_B (giữ nguyên) chặn tất cả các cạnh không có trong H_1và $C_A \backslash K$ chặn tất cả các cạnh không liên quan đến K. Các cạnh đó thì được chặn bởi $N(K)$, vô lý vì C_A cực tiểu. Từ đó suy ra đồ thị hai phía H_1 thỏa mãn điều kiện (H), do đó có một hệ đại diện phân biệt tương ứng cho H_1. Do tính đối xứng của H_1 và H_2, suy ra H_2 cũng thỏa mãn điều kiện (H). Từ đó suy ra đồ thị hai phía H_2 cũng có hệ đại diện phân biệt. Hợp hai hệ đại diện phân biệt này ta được một tập các cạnh độc lập (ghép đôi). Điều này chứng tỏ $\gamma(G) = \iota(G)$ Định lý konig phần a) được chứng minh.
$\alpha(G) = \rho(G)$: số điểm độc lập cực đại = số cạnh phủ cực tiểu .
Tương tự như trên ta chỉ ra rằng $\rho(G) \leq \infty(G)$.
2) Konig $\rightarrow$ Hall.
Điều kiện cần là hiển nhiên. nếu $K \cup A$ và $|K| > |N(K)|$ ít nhất một đỉnh của K sẽ không thể đươc ghép đôi, và như vậy A không có hệ đại diện phân biệt. Ta sẽ chỉ ra điều kiện đủ bằng phản chứng. Giả sử $|N(K)| \geq |K|\ \forall K \subseteq A$ và A không có hệ đại diện phân biệt. Giả sử M là một tập cạnh độc lập (kết đôi) cực đại. Khi đó theo định lý Konig $|A| \geq |M| = \gamma(G) = \iota(G)$. Kí hiệu $X = \{$ các đỉnh $x : x \in A$và $\exists y \in B$để $(x, y) \in M\}$. Khi đó $|X| = |M| < |A|$. Vì M cực đại nên $N(A \backslash X) \subseteq N(M)$. Điều đó chứng tỏ nếu $K \subset A$, $K \doteq M$, thì $|K \cup M| > |M| = N(M)$mẫu thuẫn với điều kiện hall $(H) : |N(K)| \geq |K|, \forall\ K \subseteq A$.
Điều này chứng tỏ $K = \varnothing$., nói cách khác A có (SDR). ☐

Các chứng minh tương đương này đều dựa trên hậu thuẫn là ý tưởng của thuật toán Hungary. Môt số tài liệu tham khảo về tinh tương đương của các đề tài có thể xem tại [3] va tương đối đầy đủ tại [10] cua P. F. Reichmeider chỉ nghiên cứu về tính tương đương.

5 Lý Thuyết phân phối ổn định và thực tiễn tạo lập thị trường.

Giải Nobel kinh tế năm 2012 được trao cho hai nhà bác học nghiên cứu về một lĩnh vực khá lạ lẫm, nhưng không vì thế mà không thú vị. Lloyd S. Shapley và Alvin E. Roth, vì các nghiên cứu của hai ông trong lĩnh vực lý thuyết "kết đôi" và các phát minh về thiết kế thị trường có khả năng ứng dụng rộng rãi trên khắp thế giới (D. Gale mất trước khi binh bầu giải- theo nội qui giải Nobel chỉ dành cho các tác giả còn sống).

Vào năm 1962, khi Shapley mới 39 tuổi và đang là một nhà toán học làm ở Rand Corp, một think-tank đầy quyền lực của Hoa Kỳ, nơi chuyên nghiên cứu các dự án hạng nặng cho Bộ

Quốc phòng của nước này, ông và một nhà kinh tế khác thuộc Đại học Brown là D. Gale đăng một công trình nghiên cứu có tên "tuyển sinh đại học và sưổn định của hôn nhân" trên tạp chí American Mathematical Monthly [12]
Shapley và Gale đưa ra một thuật toán (algorithm). Nghiên cứu này bắt đầu bằng quan sát: từ những hành vi đơn giản gặp gỡ mua bán hoặc ký hợp đồng như việc mua bánh mì ở cửa tiệm hoặc thuê thợ sửa ống nước, đến các vấn đề của xã hội và kinh tế, tương tác giữa các cá nhân và các tổ chức. Với các giao dịch kinh tế bình thường, người bán phát giá bán, người mua đến mặc cả, thỏa thuận giá, và nếu thỏa thuận thành công thì chuyện mua bán diễn ra. Shapley và Gale quan sát thấy một số trường hợp, thí dụ như việc tuyển sinh ở các trường đại học hay việc tìm kiếm bạn đời của mỗi người, giao dịch liên quan đến một dạng tương tác mà sau này các nhà kinh tế học gọi là "kết đôi" (matching).

5.1 Bài toán hôn nhân bền vững

Shapley và Gale đưa ra một khái niệm sau này được gọi là "kết đôi bền vững" (stable matching). Một kết quả kết đôi bền vững là trường hợp mà sau khi ghép đôi xong, không xảy ra chuyện nó có thể bị phá vỡ.
Bài toán hôn nhân bền vững (SMP) yêu cầu tìm một kết đôi bền vững giữa các phần tử của hai tập hợp theo thứ tự ưu tiên của mỗi phần tử. Một kết đôi là một ánh xạ từ các phần tử của tập hợp này tới các phần tử của tập hợp kia. Một cặp ghép là bền vững nếu hai điều kiện sau không đồng thời xảy ra:

a) Một phần tử A của tập hợp thứ nhất thích phần tử B của tập hợp thứ hai hơn phần tử được ghép với A.

b) B cũng thích A hơn phần tử được ghép với B.

Nói cách khác, một cặp ghép (kết đôi) là bền vững nếu không tồn tại cặp (A, B) trong đó cả A và B đều thích phần tử kia hơn phần tử được ghép với chúng.
Bài toán hôn nhân bền vững thường được phát biểu như sau:
Có n người đàn ông và n phụ nữ, trong đó mỗi người xếp hạng tất các mọi người khác giới từ 1 đến n theo thứ tự ưu tiên, cần tìm cách tổ chức hôn nhân sao cho không tồn tại hai người khác giới yêu nhau hơn vợ/chồng của họ. Nếu không tồn tại những người như vậy thì tất cả các cuộc hôn nhân là "bền vững."
Thuật toán để tìm lời giải cho bài toán hôn nhân bền vững được áp dụng cho nhiều bài toán thực tế.

Định lý 5.1 (1962, D. Gale và L. Shapley)**.** *Với số lượng đàn ông và phụ nữ bằng nhau, luôn tồn tại lời giải bền vững cho SMP.*

Chứng minh. Định lý Hall đã đảm bảo việc kén vợ gả chồng (ghép đôi) nếu thỏa mãn điều kiện (H) thì thực hiện được. Để tồn tại hôn nhân bền vững thì phải thỏa mãn thêm các điều kiện không tồn tại tình yêu chéo. Để giải quyết tình trạng này Gale và Shapley đưa ra một thuật toán.
Thuật toán Gale-Shapley bao gồm nhiều "lượt" trong đó mỗi người đàn ông chưa đính hôn "cầu hôn" người phụ nữ anh ta thích nhất mà trước đó chưa cầu hôn. Mỗi phụ nữ xem xét tất cả mọi người cầu hôn và trả lời người cô thích nhất "có thể" và từ chối tất cả những người còn lại. Tạm thời cô được "đính hôn" với người đàn ông được cô chọn và anh ta cũng tạm thời "đính hôn" với cô. Như vậy trong lượt đầu tiên, a) mỗi người đàn ông cầu hôn người phụ nữ

anh thích nhất, rồi b) mỗi người phụ nữ trả lời "có thể" với người cô thích nhất và từ chối tất cả những người khác. Ở những lượt tiếp theo, đầu tiên a) mỗi người đàn ông chưa đính hôn cầu hôn người phụ nữ anh ta thích nhất mà anh ta chưa cầu hôn trước đó (bất kể người đó có đang đính hôn hay không), sau đó b) mỗi người phụ nữ trả lời "có thể" với người cầu hôn cô thích nhất (bất kể đó là người đính hôn tạm thời hay người khác) và từ chối tất cả những người khác (có thể bao gồm cả người đính hôn tạm thời). Việc đính hôn tạm thời cho phép người phụ nữ đã đính hôn có thể tìm được người ngày càng tốt hơn ở những lượt về sau. □

Thuật toán này đảm bảo rằng:

a) **Thuật toán có điểm dừng sau hữu hạn bước**
Có tổng cộng n_2 lời tỏ tình. Mỗi khi có người tỏ tình số lời tỏ tình có thể giảm đi 1. Thuật toán dừng lại khi không có người đàn ông nào bị từ chối, điều đó cũng tương đương với các cô gái đều đã có người ngỏ lời và không còn ai phải từ chối.

b) **Tất cả mọi người đều được kết hôn**
Sau khi một phụ nữ đã đính hôn, cô luôn đính hôn với một người nào đó. Do đó cuối cùng không thể tồn tại một người đàn ông và một người phụ nữ đều chưa đính hôn vì anh ta nhất định cầu hôn với cô tại một thời điểm nào đó (vì một người đàn ông cuối cùng có thể cầu hôn với tất cả mọi phụ nữ nều cần thiết) và do cô chưa đính hôn, cô sẽ trả lời đồng ý.

c) **Hôn nhân bền vững**
Giả sử An là một phụ nữ và Bình là một người đàn ông đều đã đính hôn, nhưng không đính hôn với nhau. Tại thời điểm thuật toán kết thúc, không thể xảy ra trường hợp cả An và Bình đều thích người kia hơn vợ/chồng của họ. Nếu Bình thích An hơn vợ anh ta, anh ta nhất định đã cầu hôn An trước khi cầu hôn vợ mình. Nếu An chấp nhận lời cầu hôn đó nhưng cuối cùng không kết hôn với Bình, cô nhất định bỏ anh ta theo một người khác cô thích hơn. Nếu An từ chối lời cầu hôn, cô nhất định đã đính hôn với người cô thích hơn Bình.

Nhận xét: các chàng trai ngày càng xuống thế, các cô gái thì càng lên giá vậy “ai có lợi” – và chúng ta làm ngược lại thì sao?
– Các chàng trai có được hưởng quyền lợi tối ưu (kêt quả tối ưu)
– Các cô gái thụ động chờ điều kiện tốt đẹp.

5.2 Tình trạng đa đoan hay hệ thống tuyển sinh đại học.

Thuật toán cặp đôi hoàn hảo (gia đình bền vững) có thể chuyển sang thành đề án tuyển sinh?
– Nếu có thể thì ai là người hưởng lợi? học sinh hay các trường cao học?

Trong trường hợp tuyển sinh đại học, giả sử một cách đơn giản là có 10 nghìn sinh viên đầu vào và có 10 trường đại học, mỗi trường tuyển một nghìn sinh viên. Câu chuyện nghe đơn giản, nhưng nó phức tạp ở chỗ mỗi sinh viên lại có trình độ khác nhau và sở thích của các sinh viên này đối với các trường đại học cũng khác nhau. Như thế, giả sử một trường đại học bất kỳ nhận được 2 nghìn hồ sơ dự tuyển, thì họ phải loại đi bao nhiêu và giữ lại bao nhiêu hồ sơ khi biết rằng sẽ có nhiều sinh viên chúng tuyển sẽ không tham gia vào học ở trường đó vì họ

được nhận vào các trường khác mà họ thích hơn?
Thuật toán Gale − Shapley này cũng áp dụng hoàn hảo cho trường hợp tuyển sinh đại học, mặc dù lập luận áp dụng cho bài toán tuyển sinh phức tạp hơn đôi chút. Nét đẹp của thuật toán này là nó rất đơn giản và tạo ra một kết quả phi thường − thử tưởng tượng một xã hội mà tất cả mọi người đều tìm được người thích hợp nhất với mình, và không ai phải lựa chọn lại lần thứ hai.
Chỉ cần sửa trong thuật toán kết đôi hoàn hảo Gale-Shapley algorithm là các trường đại học (các cô gái) có thể được tuyển nhiều học sinh (lấy nhiều chồng) theo hạn mức (quota) qui định trước. Tức là các trường (các cô gái) được trả lời "có thể" với tất cả những người có nguyện vọng cho đến khi đầy các con số, và lúc đó van gạn lọc mới bắt đầu hoạt động. "Có thể" với người điểm cao hơn và loại ngay người đứng dưới.
Thuật toán trên được Gale và Shapley đưa ra năm 1962 để phục vụ việc đưa ra các điểm sàn thi đại học.Đây là một chương trình đáp ứng được tính bền vững.Quyền lợi có học sinh được đảm bảo tối ưu. Thời gian nhanh có kết quả. Khó có sự lợi dụng hay tìm kẽ hở của chương trình.

5.3 Đến sự ra đời của một ngành nghiên cứu mới.

Từ việc sáng tạo ra một thuật toán khá đơn giản để giải quyết một vấn đề phức tạp liên quan đến việc kết đôi trong vấn đề hôn nhân và vấn đề tuyển sinh đại học, Gale và Shapley đã đặt viên gạch đầu tiên cho một ngành nghiên cứu mới là lý thuyết kết đôi (matching theory) trong kinh tế học. Lý thuyết này hiện nay được ứng dụng rộng rãi trong các ngành nghiên cứu khác của kinh tế học, từ vi mô (như lý thuyết về đấu thầu - auction theory) tới vĩ mô (như lý thuyết về tiền tệ - monetary theory), và là một cột trụ của lý thuyết trò chơi hợp tác (cooperative game theory).
Một trong những người tiên phong, và dũng cảm nhất, trong việc phát triển lý thuyết của Gale - Shapley là **Alvin Roth** - (Tên có vẻ có nguồn gốc Hungary)- nhà kinh tế học của Trường đại học Harvard. Là một giáo sư cực kỳ uyên bác, Roth có bề ngoài nhìn rất mọt sách (nerdy), khi đó ông đang phát triển các nghiên cứu kinh tế học thí nghiệm - tức là mô phỏng các tương tác kinh tế trong môi trường có kiểm soát. Ông cùng một số giáo sư khác như giáo sư Dale Stalh tổ chức các trò chơi kinh tế nho nhỏ và có thưởng (vài chục đôla) để sinh viên tham gia.

Các ông sau đó thu thập và phân tích kết quả của các trò chơi này và mô hình hóa các tương tác giữa những người chơi với nhau dựa trên quan sát thực tế. Đây là một hướng nghiên cứu còn mới hơn nữa so với lý thuyết kết đôi.

Alvin Roth[11] được nhận giải Nobel vì các công trình liên quan đến việc "thiết kế thị trường". Lưu ý là thuật toán Dale - Shapley bản chất cũng là việc thiết kế một luật chơi cho một dạng thị trường, tuy nhiên, trong ví dụ về gán ghép áp dụng cho thị trường hôn nhân ở trên, khả năng áp dụng trên thực tế của nó hầu như không có mà chỉ có vẻ đẹp thuần túy về mặt lý thuyết. Alvin đi xa hơn bằng việc sáng tạo ra các luật chơi áp dụng được, và đã áp dụng trong thực tế. Nói cách khác, ông thiết kế ra các thị trường mà nếu không có các phát minh của ông thì đã không tồn tại hoặc tồn tại dưới một dạng rất không hiệu quả.
Các ứng dụng đột phá của Alvin Roth trong mở rộng và phát triển thuật toán Dale – Shapley đã giúp ông giải quyết những vấn đề quan trọng trong thực tế. Ta có thể liệt kê những thành công lớn nhất cua Alvin R. Trường hợp đầu tiên của Alvin R. là thiết kế ra cơ chế giúp cho Chương trình quốc gia về phân bổ bác sĩ nội trú (NRMP) của Hoa Kỳ. Từ đó NRMP đã hoạt

động thông suốt và mỗi năm giúp "gán ghép" được hơn 20.000 bác sĩ tập sự với các cơ sở y tế. Trường hợp thứ hai là hệ thống tuyển sinh các trường công lập ở New York. Thành công của chương trình này đã tạo làn sóng cho các nước trên thế giới cải cách hệ tuyển sinh của mình linh hoạt và dân chủ đảm bảo quyên lợi của người đi hoc.

Ủy ban Nobel cho rằng Lloyd Shapley và Alvin Roth đã làm việc độc lập với nhau, nhưng sự thành công trong nghiên cứu của họ là do sự kết hợp giữa các kết quả lý thuyết của Shapley với sự tinh tế của Roth khi đưa các kết quả lý thuyết này thành các áp dụng thực tiễn trong việc thiết kế thị trường. Lĩnh vực này còn tiếp tục phát triển và đang có nhiều hứa hẹn to lớn trong tương lai.

6 Công việc Tuyển sinh ở Việt Nam

Chúng ta hoàn toàn có thể xây dựng một hệ thống tuyển sinh công bằng dân chủ lấy kết quả thi và nguyện vọng thực của học sinh là chỉ tiêu xét tuyển, khắc phục tận gốc sự bất cập hiện tại phát sinh do hạn chế của hệ tuyển sinh "thủ công" gây ra.
Điều kiện vật chất cũng như trình độ công nghệ của Việt nam hoàn toàn có thể đảm được và cho ra đời một chương trình tuyển sinh đáp ứng yêu cầu hiện tại và tương lai.
Nghiên cứu các hệ tuyển sinh trung học và đại học của thế giới chúng ta có thể rút ngắn rất nhiều về thời gian cũng như kinh phí để thực hiện project này.
Có rất nhiều hệ tuyển sinh chúng ta có thể quan tâm. Nhưng một điều chắc chắn là các hệ thống tuyển sinh của Mỹ, Úc và các nước tiên tiến chưa phù hợp với tình hình giáo dục thực tại của Việt Nam. Thay vào đó các hệ thống giáo dục của các nước Đông Âu (Hung, Balan, Tiêp . . .) có nhiều điểm tương đồng. Các vấn đề xã hội và giáo dục cũng có nhiều điểm giống nhau. Vì thế hướng phát triển của hệ tuyển sinh Việt nam nếu đi theo hướng của các nước này sẽ thuận lợi nhất và dễ áp dụng nhất.
Toán ứng dụng của Viêt nam thi chỉ có tại Việt Nam mới có, và có rất nhiều.**Xây dựng một hệ tuyển sinh Quốc gia** - đây là một vi dụ.

7 Thay cho lời kết.

Tôi được phản biện một công trình toán kinh tế của Nguyễn Annamaria [2] về sự tương đương của 7 đề tài nổi tiếng trong nền tảng khoa hoc máy tính:
- Định lý Hall
- Định lý Konig
- Định lý Konig-Egervary(1931)
- Định lý Menger (1927)
- Định lý dòng chảy cực đai và nhát cắt cực tiểu (thuật toán Ford- Fulkerson)
- Định lý Birkhoff-Neumann (1946)
- Định lý Dilworth.

Chúng ta đều biết 7 định lý này đóng vai trò quan trọng trong nền tảng của khoa học máy tính và một điều kì lạ là các kết quả này tương đương. Tuy vậy các chứng minh đều nằm giải giac ở nhiều tài liệu khác nhau và phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau, phục vụ mục đích riêng của công trình người ta đang nghiên cứu. Việc có nhữngtài liệu tập trung và tổng kết, dẫn giải

sự tương đương của các định lý này và các kết quả liên quan theo nhiều góc độ khác nhau, là điều vô cùng cấp bách và cần thiết.
Sự phát triển sôi động của ngành khoa học này đặt một ý tưởng thiết thực: Khả năng tạo điều kiện cho các bạn trẻ sớm làm quen với những kiến thức sống động và đang có tầm ứng dụng rộng khắp - là một công việc rất nên coi trọng tập trung thực hiện.
Một loạt các câu hỏi có thể đặt ra:

– Các kết quả toán học phong phú hiện thời, bao nhiêu kết quả là lĩnh vực riêng và bao nhiêu là tương đương?

– Nguyên nhân sâu sắc của sự tương đương của những kết quả này?

– Tiếp cận ứng dụng theo hướng đưa vào thực tế lao động sản xuất.

Đề tài này tôi viết tập chung phục vụ cho lớp người đọc là các bạn trẻ, vì thế mục đích "tiêu hóa đươc" (dạy được và học đươc) là tiêu chí được đặt song song với việc phổ biến các kết quả toán học.

– Các định lý được trình bày độc lập, liệt kê các dạng thể hiện của ứng dụng.

– Các chứng minh tương đương được trình bày tỉ mỉ.

– Quan trong hơn hết là các chứng minh bằng thuật toán đuợc ưu tiên hàng đầu phục vụ trực tiếp cho khoa học máy tính.

Như vậy các vấn đề không chỉ bó hẹp trong phạm vi chỉ ra tồn tại lời giải, mà cả thuật toán thực tìm lời giải trong thời gian hữu hạn cũng được quan tâm triệt để.

Hy vọng các cố gắng ban đầu này tạo hứng nghiên cứu lý thuyết cũng như ứng dụng cho các bạn trẻ.

Tài liệu

1. **M. Aigner and G. M. Ziegler**, Proofs from the Book. Springer, (2013)
2. **Nguyen Annamaria:** Marriage theorem. Luận án tốt nghiệp (2016)
3. **R. D. Borgersen**, Equivalence of Seven Major Theorems in Combinatorics http://home.cc.umanitoba.ca/borgerse/, 2004.
4. **T. Galai,** Maximum-minimum Satze uber Graphen. Acta Mathematica Academiae Scientiarium Hungaricae, 3, 395 – 434, (1958)
5. **P. Hall**, on Representatives of Subsets. Journal ò the London Matematical Society, 10. 26-30,(1935)
6. **Gy. Y. Katona**, A. Recski, Cs. Szabo, A szamitastudomany alapjai. Typotext,(2006)
7. **H. W. Kuhn**, The Hungarian Method for the Assignment Problem. Naval Research logistics Quarterly, 2, 83-97, (1955)
8. **L. Lovasz, M. D. Plumer**,Matching Theory ÁM chelsea Publishing (2009)
9. **D. Konig**, Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen: Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe, Akademia Verlag (1936)

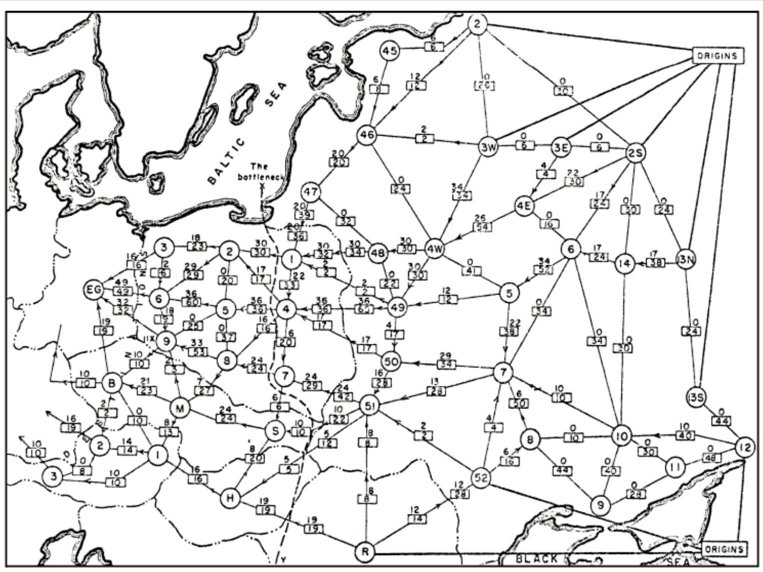
10. **P. F. Reichmeider**, The Equivalence of some Combinatorial Matching Theorems. Braun-Brumfield,(1984).
11. **A. E. Roth**, College Admissions Problem is not Equivalent to the Mariage Problem. Journal of Economic Theory, 36, 277- 288, (1985)
12. **L. S. Shapley**, D. Gale, College Admissions and the Stability of Mariage. The Amercan Mathematical Monthly 69, 9 – 15, (1962).
13. **N. Đ. Nghĩa, N. T. Thanh**, Toán rời rạc, Nhà Xuất Bản Đai Học Quốc Gia Hà Nội. (2006).

Phần II
Dòng chảy cực đại – Nhát cắt cực tiểu

Có thể đưa toán kinh tế và khoa học máy tính vào chương trình phổ thông được không?

Nền tảng công trình của Ford – Fulkerson về lý thuyết dòng chảy là bản báo cáo tình báo mật Harris – Ross giành cho không lực Hoa Kỳ năm 1955. Trong bản báo cáo này người ta mô hình hóa hệ thống đường sắt của Châu Âu như một đồ thị 44 đỉnh và 105 cạnh. Mỗi đỉnh là một trung tâm đường sắt và các cạnh chính là đường liên vận nối các trung tâm này. Bằng các con số do CIA cung cấp, người ta có dung lượng của mỗi tuyến đường sắt. Và như vậy bài toán dòng chảy cực đại và nhát cắt cực tiểu được hình thành. Với không lực Hoa kỳ điều quan tâm trước mặt là vấn đề truy tìm nhát cắt cực tiểu.

Trong chiến tranh lạnh việc đổ bộ của Hồng quân Nga sang phương Tây là một mối lo thực sự. Để ngăn chặn sự phát triển này khả năng tiêu diệt có hiệu quả các cơ sở hậu cần là chiến lược duy nhất cần thực hiện. Trong bản báo cáo đã nêu người ta đã chỉ ra được nhát cắt chiến lược (điều đáng lưu ý là nhát cắt này sẻ đôi Ba Lan, đi dọc theo biên giới Csekslovak – Liên Xô và Hungary – Romania). Người ta cũng chứng minh được rằng không có giải pháp tốt hơn, bằng cách chỉ ra tồn tại một dòng chảy có độ lớn tương đương (max flow) từ các căn cứ quân sự của Nga – Xô tràn sang phương Tây.



Harris and Ross's map of the Warsaw Pact rail network

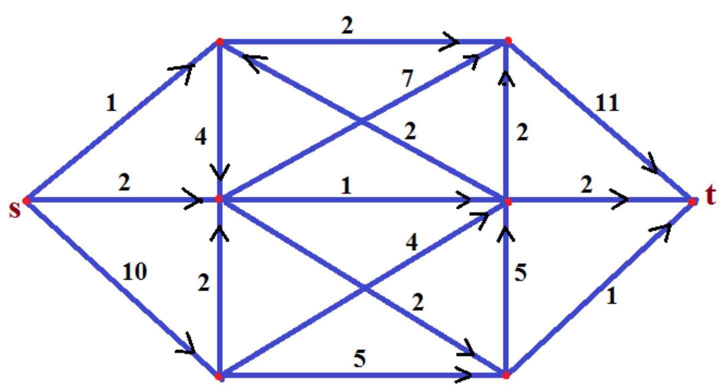
Để tham mưu cho việc hoạch định chiến dịch tấn công không kích, phương pháp này cũng chỉ ra được một nhát cắt hữu hiệu nhất về tài chính cũng như hiệu quả. Tướng Ross là người hiểu biết sâu sắc về hoạt động của quân đội. Trong bản tường trình ông ta nhấn mạnh: Chiến lược khoa học quân sự mới không làm đảo lộn hệ thống quân sự hiện hành. Bên cạnh những sĩ quan khoa học đặc nhiệm về máy tính, luôn luôn cần công việc của những người lính chuyên nghiệp quân sự.

Nhưng đây cũng có thể coi là ngày ra đời của những người lính "cổ cồn" tác chiến bên cốc cà fe trong phòng điều hòa đầy đủ tiện nghi. Họ chính là lực lượng đặc biệt tinh nhuệ khoa học. Ford và Fulkerson trên mô hình hóa thành bài toán dòng chảy đã thành công khi chứng minh định lý :Dòng chảy cực đại – nhát cắt cực tiểu. Kết quả này đã đặt nền móng cho sự phát triển của nhiều ngành khoa học khác, trong đó phải kể đến tổ hợp tối ưu, Lý thuyết đồ thị và với sự phát triển của tin học người ta thấy sự xuất hiện của Lý Thuyết Dòng Chảy-Mạng trên toàn bộ NET.

8 Lý thuyết mạng lưới và dòng chảy

Người ta muốn xây dựng một mạng lưới đường ống cung cấp nước. Có một nguồn nước (nguồn cung), từ đó nước sẽ được cung cấp đi các nơi bằng các ống nước có sức tải cho trước. Trong mỗi đường ống dẫn, nước chỉ chảy theo một chiều cố định, nhưng giữa hai điểm từ cả hai hướng đều có thể có ống dẫn . Cuối cùng nước thải được tập trung về một điểm (hồ chứa) thể hiện nhu cầu sử dụng. Nước không bị mất giữa nguồn cung và điểm cuối nơi chứa nước thải (nhu cầu).
Vấn đề đặt ra là: Mỗi ống dẫn phải cho bao nhiêu nước chảy qua để sao cho lượng nước từ nguồn qua nơi tiêu thụ rồi tập trung cuối cùng về hồ thải là lớn nhất mà không vượt quá sức tải của hệ thống ống dẫn nước.

Hệ thống mạng dẫn nước được mô hình hóa bằng ngôn ngữ toán học. Ta sẽ gọi nó là LÝ THUYẾT MẠNG LƯỚI và DÒNG CHẢY.
Cho $G(V,\mathbb{E})$: Đồ thị định hướng với V là tập các đỉnh và $\mathbb{E}$ là tập các cạnh có hướng. Đồ thị định hướng $G(V,\mathbb{E})$ được gọi là *mạng lưới* nếu V chứa điểm s và t sao cho từ s chỉ xuất phát các cạnh đi ra và ở t chỉ có cạnh đi vào, thêm nữa tồn tại hàm số $c : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^+$ tất cả các cạnh (ống dẫn) đều có dung lượng cố định (sức chứa dòng chảy). Do đó c là một hàm số từ tập các cạnh đến tập các số thực dương. Người ta dùng thuật ngữ (G, s, t, c) để kí hiệu mạng lưới.
$s \in V$: Nguồn (cung cấp), từ s chỉ xuất phát các cạnh.
$t \in V$: Đầu tiêu thụ (nhu cầu) $-$ ở t các cạnh chỉ có hướng vào.
s, t là hai điểm đặc biệt của mạng lưới, s là điểm xuất phát và t điểm kết thúc.



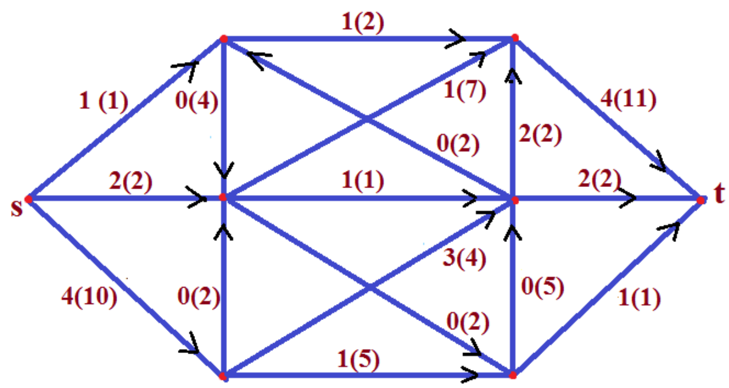
Bài toán được đặt ra là: Chúng ta muốn biết cần phải xả bao nhiêu nước từ s để lượng nước lưu thông đến t là nhiều nhất. Điều này có thể thể hiện bằng trên mỗi ống dẫn, người ta phải cho chảy một lượng nước chảy qua là bao nhiêu? Tức là chúng ta phải tìm một hàm số có dạng $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ (không âm). Hàm số này phải thỏa mãn những điều kiện nhất định (sẽ liệt kê sau). Những hàm số thỏa mãn các điều kiện này sẽ được gọi là dòng chảy. Mục đích là phải tìm dòng chảy tối ưu (cung cấp được nhiều nước nhất.

Hàm số $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^+$ được gọi là dòng chảy nếu

a) $0 \le f(e) \le c(e)$ với mọi $e \in \mathbb{E}$

b) $\sum_{vx\in\mathbb{E}} f(vx) = \sum_{yv\in\mathbb{E}} f(yv)$ với mọi $v \in V\backslash\{s,t\}$

Điều kiện đầu tiên tương ứng với hiện thực: Trong ống lượng nước chảy không thể vượt quá sức tải của ống.



Điều kiện thứ hai chỉ ra rằng ngoài nguồn "cung" và bể chứa ("cầu") thì qua bất kì điểm nào của hệ thống, lượng nước chảy vào và lượng nước chảy ra là bằng nhau (nước không tự sản và không tự biến đi).
Người ta cũng hay dùng biểu thức tương đương, chỉ khác đôi chút về hình thức thay cho điều kiện b).
b') $\sum_{e\text{hướng vào}v} f(e) = \sum_{e\text{ra khỏi}v}$f(e) với mọi $v \in V\backslash\{s,t\}$
Ta thấy ngay $f \equiv 0$ luôn luôn là một dòng chảy.

Định lý 8.1. *Nếu mạng lưới (G, s, t, c) không chứa cạnh đi vào s và không chứa cạnh ra khỏi t thì:*

$$\sum_{sx\in\mathbb{E}} f(sx) = \sum_{yt\in\mathbb{E}} f(yt)$$

Đại lượng vừa được xác định trong định lý trên được gọi là Độ lớn của dòng chảy kí hiệu $F(f)$ (độ lớn của f: $\sum_{\text{cạnh } e \text{ đi từ } s} f(e) = \sum_{\text{cạnh } e \text{ đi vào } t} f(e)$).

Nhát cắt định hướng. Cho $S \subseteq V$, $s \in S$ và $T = V\S$ (do đó $t \in T$, $S \cup T = V$). Khi đó tập các cạnh có điểm đầu trong S và điểm cuối trong T được gọi là nhát cắt định hướng $s - t$ được xác định bởi (S, T).
Vì nguồn cung s nằm trong S và đầu tiêu thụ t nằm trong T, cho nên lượng nước chảy từ s về t cần phải qua các cạnh nào đó của nhát cắt định hướng và cũng không thể nhiều hơn sức tải mà nhát cắt chịu được. Khả năng lưu thông của nhát cắt gọi là dung lượng của nhát cắt. Kí hiệu dung lượng nhát cắt định hướng:

$$C(S,T) = \sum_{x\in S, y\in T} c(x,y)$$

9 Định Lý Max-flow min-cut.

Định lý 9.1 (Ford – Fulkerson [1]). *] Cho $G(V\mathbb{E})$ đồ thị có hướng và (G, s, t, c) là một mạng lưới. Khi đó độ lớn của dòng chảy cực đại bằng độ lớn của nhát cắt cực tiểu:*

$$\max_f F(f) = \min_{(S,T)} C(S,T).$$

Định lý này còn thường được gọi là định lý Max Flow-Min Cut.
Dễ thấy $\max_f F(f) \leq \min_{(S,T)} C(S,T)$, vì

$$C(S,T) = \sum_{x\in S, y\in T} c(x,y) \geq \sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) \geq$$
$$\sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) - \sum_{x\in S, y\in T} f(y,x) = F(f)$$

a, Định lý Integrity.
Định nghĩa khái niệm **đường cải tiến**. Một đường đi $s-t$ không nhất thiết là đường định hướng sẽ được gọi là đường cải tiến nếu trong quá trình đi từ s đến t những cạnh thuận e (hướng chỉ phía trước): $f(e) < c(e)$, và các cạnh nghịch e (chỉ hướng ngược lại) $f(e) > 0$.

Bổ đề 1. Giá trị của một dòng chảy là cực đại khi và chỉ khi không chứa đường cải tiến $s-t$. Khi đó tồn tại một nhát cắt có giá trị bằng giá trị dòng chảy cực đại.

Mạng lưới $G(s, t, c)$ được gọi là mạng lưới có dung lượng nguyên (hữu tỉ) nếu hàm dung lượng lấy giá trị nguyên (hữu tỉ) tức là
$c : \mathbb{E} \to \mathbb{N}^+(\mathbb{Q}^+)$ với tất cả cạnh $e \in \mathbb{E}$

Định lý 9.2 (Integrity). *Nếu mạng lưới $G(s, t, c)$ có hàm dung lượng nguyên (hữu tỉ), thì tồn tại dòng chảy cực đại và giá trị của nó bằng nhát cắt cực tiểu. Thêm nữa giá trị này cũng là số nguyên (hữu tỉ).*

b, Sự tương đương với đinh lý Integrity kết thúc quá trình chứng minh định lý Ford-Fulkerson.
Các kết quả của toán rời rạc nói chung và đồ thị nói riêng đặc trưng của nó là thực hiện trên các tập hữu hạn và vì thế tính rời rạc luôn thể hiện và giữ vai trò chủ đạo. Tính rời rạc thường đi cùng với tính chất các số nguyên, tính chất phân hoạch của tập hợp.

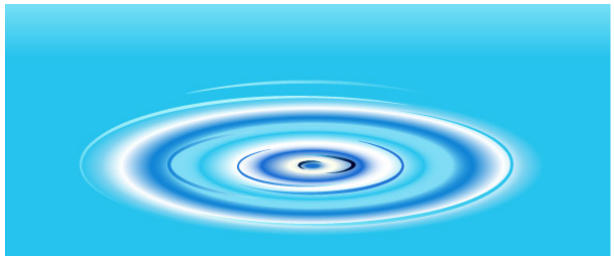
Định lý Ford-Fullkerson xuất phát từ khía cạnh thực tế kinh tế nên không thể thiếu sự có mặt của tập số thực. Rất may bước lưu chuyển từ tập số nguyên sang hữu tỉ rồi đến tập số thực được đảm bảo chặt chẽ của công cụ giải tích chuyển các kết quả từ định lý Integrity sang kết quả của định lý Ford-Fulkerson qua sự tương đương của hai định lý này.

Định lý 9.3. *Định lý Integrity tương đương với định lý Ford-Fulkerson.*

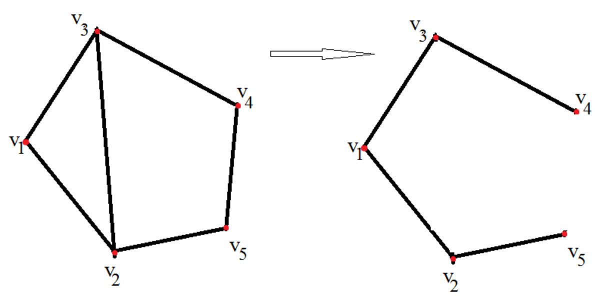
10 Các thuật Toán

a.Thuật toán tìm kiếm bình diện
Trong quá trình chứng minh định lý và cũng như các ứng dụng về sau chúng ta sẽ dùng đến

một thuật toán có tên là Thuật toán tìm kiếm bình diện. Trước hết chúng ta làm quen với thuật toán này (Katonai Gy. [4], hay [6]).
Thuật toán tìm kiếm bình diện. Để đi hết các đỉnh của một đồ thị, một trong những phương pháp cơ bản là lan tỏa theo chiều rộng bình diện, mà thực chất là phương pháp phân vòng. Sau khi đi hết vòng trong, thì từ vòng trong đó mở đi tiếp đến những điểm chưa bị đánh dấu (chưa đi) bằng cách tìm đường đi trực tiếp (lân cận) đến nó (nếu có). Những điểm thuộc lượt này sẽ lập nên vòng lan tỏa tiếp theo.

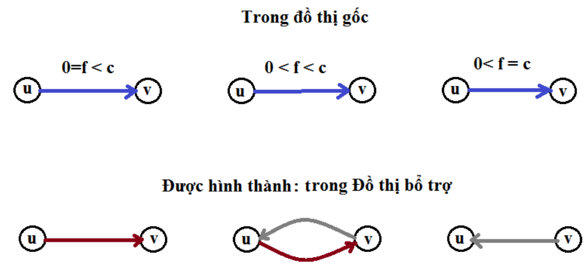


Đầu tiên ta xuất phát từ một điểm, giả sử v_{01}. Trong bước tiếp theo ta đếm tất cả các điểm là hàng xóm của v_{01} (hàng xóm của v có cạnh nối trực tiếp với v). Giả sử các điểm này là $v_{1,i}(i = 1, 2, 3, \dots, n_1)$. Hoàn thành bước k, ta đi tiếp bước $k+1$ bằng cách tìm tất cả các điểm là hàng xóm của các $v_{k,l}$ mà chưa bị đánh dấu (chưa bị sóng tràn qua)... Quá trình này tiếp tục cho đến khi không tồn tại điểm nào là hàng xóm của các điểm đã đi. Quá trình này sẽ dừng lại nếu đã đi hết các điểm liên thông với v_{01}. Cứ tiếp tục như vậy với cụm liên thông tiếp theo.... Thuật toán này dùng được cho cả 2 trường hợp đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng.

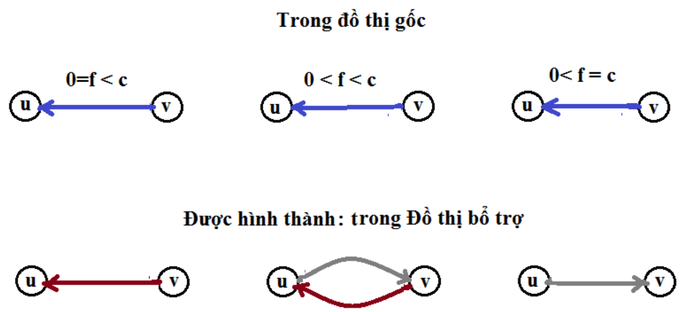


b, Thuật toán tìm dòng chảy max.

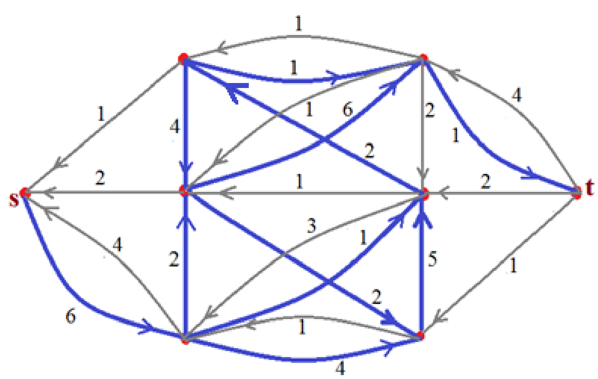
Khi hàm dung lượng có các giá trị hữu tỷ (tương đương với trường hợp hàm dung lượng lấy giá trị nguyên). Định lý Integrity và thuật toán Ford-fulkerson chứng minh sự tồn tại dòng chảy cực đại và chỉ ra sau hữu hạn bước đi thì ta sẽ đạt kết quả này.
Nội dung chính của thuật toán là từ một dòng chảy khởi đầu (có thể là dòng chảy khô, tức là dòng chảy $f \equiv 0$), người ta tìm một đường đi cải tiến, dọc theo lộ trình này làm tăng lưu lượng dòng chảy. Tiếp tục lặp lại quá trình này cho đến khi nào có thể. Câu hỏi được đặt ra là ta phải tìm ra sao, và nếu không tìm thấy thì làm thế nào biết được là chắc chắn không còn đường có thể cải tiến?



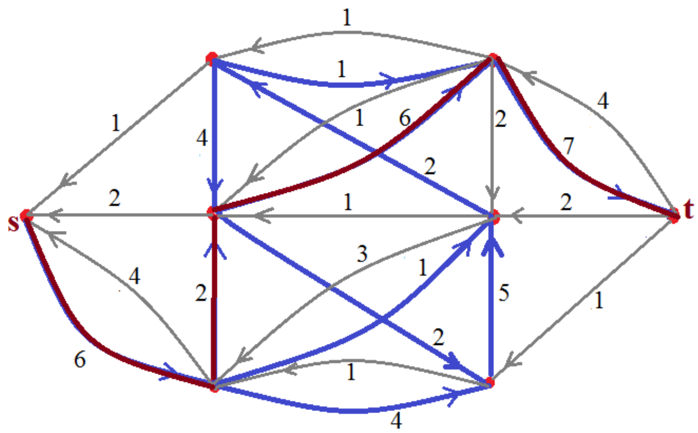
Để kiểm nghiệm xem dòng chảy này đã phải là cực đại chưa, hay còn có thể gia tăng tiếp tục, ta thiết lập một đồ thị D_f bổ trợ theo cách sau đây.
$V(D_f) = V(D)$ tiếp nữa nếu trong D có cạnh có hướng từ u đến v thì trong D_f
$-$ Ta sẽ kẻ một cạnh cùng hướng như uv nếu trong dòng chảy này lượng nước chưa đầy $(f(uv) < c(uv))$
$-$ Ta vẽ thêm một cạnh ngược hướng (vu) nếu trong mạng lưới đang hiện hành (uv) không rỗng (tức là $f(uv) > 0$).



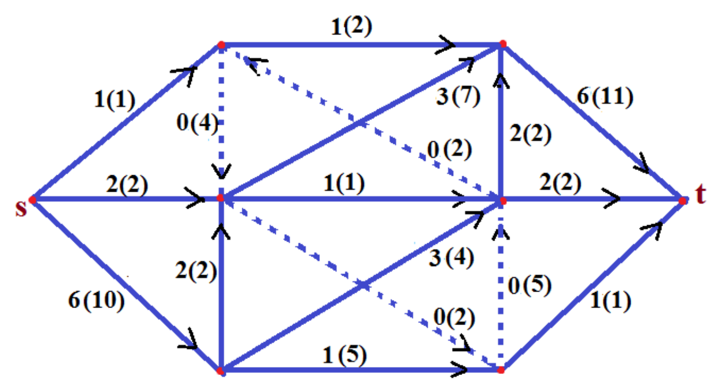
Trường hợp hướng không thuận (nghịch)



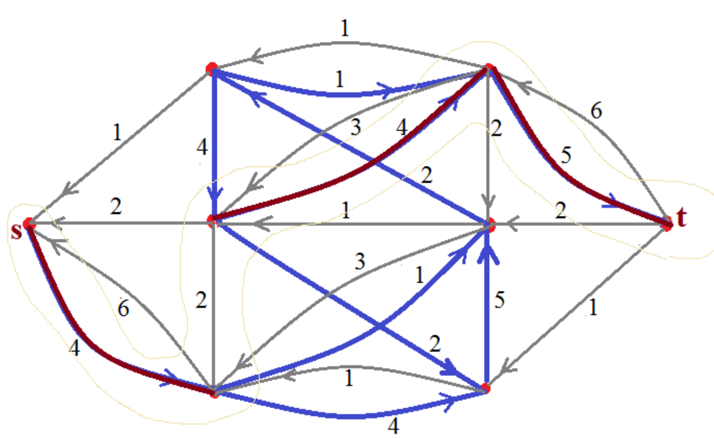
Từ dòng chảy khởi đầu ta nhận được đồ thị bổ trợ. Trong đó các đường đứt quãng là các cạnh giống như trong D nhưng có chiều ngược lại. Trong đồ thị này ta xác định dung lượng c_f bằng cách sau: các cạnh chiều thuận ta ghi dung lượng còn tiếp nhận được (tức là $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$), những cạnh có hướng ngược trên cạnh đó ta ghi giá trị của dòng chảy (tức là với các cạnh (vu) ta có $c_f(vu) = f(uv)$).



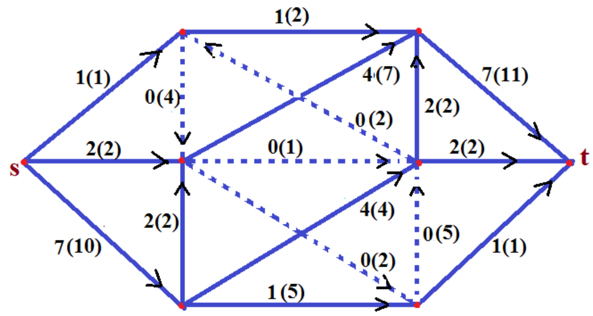
Dễ nhận thấy rằng trong đồ thị bổ trợ D_f một đường đi có định hướng $s \to t$ chính xác là tương ứng với một đường đi cải tiến trong D bắt đầu từ điểm xuất phát, tức là trong D tồn tại đường đi cải tiến khi và chỉ khi D_f có đường đi định hướng $s \to t$. Điều này hoàn toàn có thể kiểm tra được bằng thuật toán tìm kiếm bình diện.
Trong ví dụ của chúng ta, tồn tại đường đi cải tiến, được thể hiện trong hình vẽ.



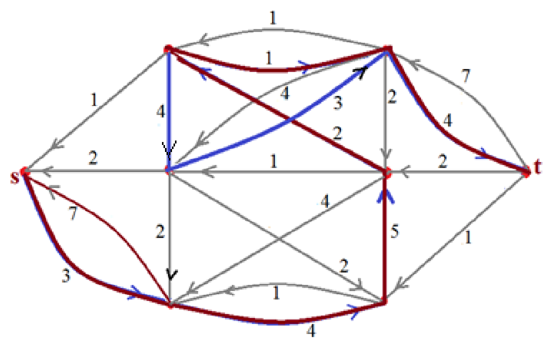
Chúng ta đã tìm được một đường đi cải tiến, dọc theo lộ trình đó chúng ta có thể tăng lưu lượng dòng chảy. Câu hỏi sẽ là bao nhiêu. Trong đồ thị bổ trợ chúng ta định nghĩa dung lượng các ống dẫn chính là giá trị tự do còn có thể sử dụng của ống dẫn. Như vậy cần tìm giá trị dung lượng cực tiểu cho phép để tăng giá trị dòng chảy. Trong trường hợp hiện tại của ta bây giờ là 2. Sau khi tăng đại lượng này ta được một dòng chảy mới như hình vẽ sau:

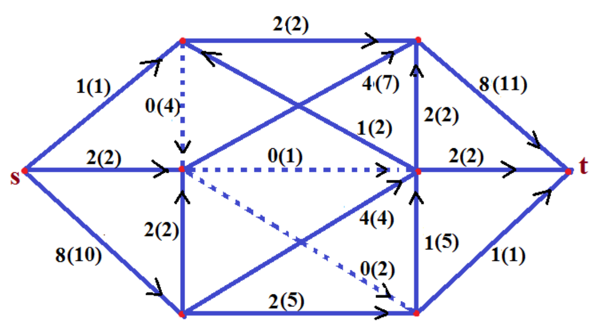


Với dòng chảy mới này ta lại tiếp tục kiến tạo đồ thị bổ trợ mới bằng phương pháp đã quen biết được sử dụng ở trên, rồi trong đồ thị này ta lại tìm đường đi cải tiến. Ta được đồ thị trong hình vẽ tiếp sau.

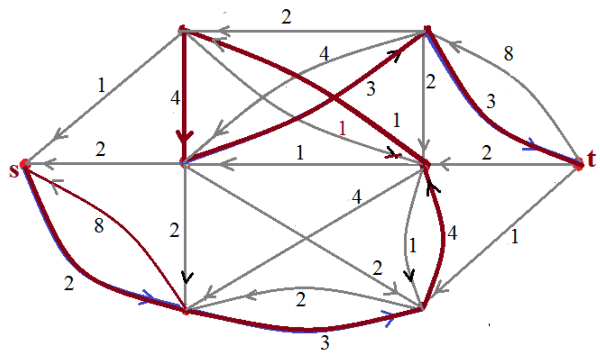


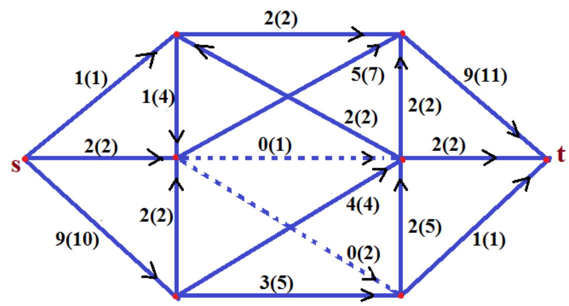
Chúng ta thấy rằng lại có đường cải tiến, trên đường này giá trị của dòng chảy đường cải tiến thêm 1 đơn vị. Hơn nữa các cạnh đứt quãng cũng được huy động vào sửa đường, điều đó có nghĩa là cạnh giữa hai điểm này trong đồ thị gốc chỉ hướng ngược lại. Trên cạnh này ta gián tiếp tăng dòng chảy xuôi bằng cách làm giảm giá trị của dòng chảy ngược (xem hình vẽ).



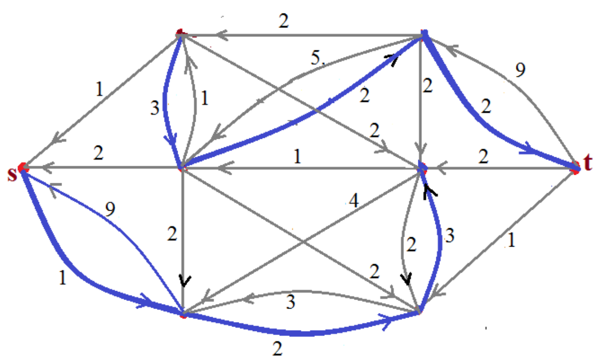


Sau khi kiến tạo đồ thị bổ trợ và dùng chương trình tìm kiếm bình diện ta lại thấy có đường $s \to t$, tức là dòng chảy vẫn chưa đạt giá trị cực đại. Đường sửa chữa mới có thể thấy trong hình tiếp theo.

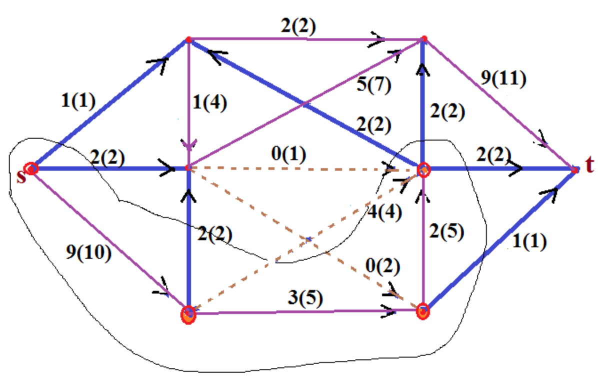




Thật vậy như trong hình vẽ bổ trợ cuối cùng này không tìm được đường định hướng từ s vào t:

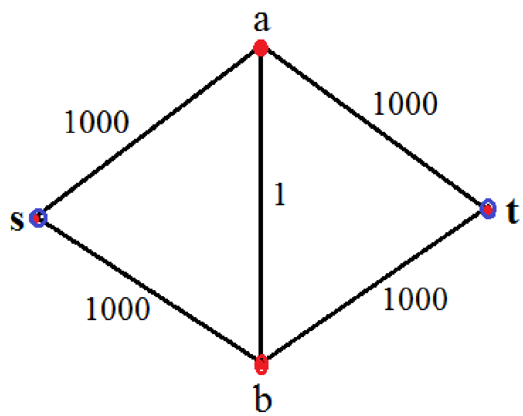


Đồ thị hình dưới đây chứng tỏ rằng tồn tại một nhát cắt (S, T) có giá trị - trong trường hợp của ta bây giờ là 12- đúng bằng giá trị trong một dòng chảy. Trong hình các đường đi tô đậm cho giá trị của dung lượng của nhát cắt, đây là các đường ống đi từ s ra và vào t. Ta thấy rõ các đường đi vào s đều có dung lượng bằng 0.



11 Định lý Edmonds – Karp

Như trên chúng ta đã chỉ ra nếu hàm dung lượng lấy giá trị hữu tỉ, thì thuật toán tìm dòng chảy cực đại sẽ dừng lại sau hữu hạn bước đi. Nhưng nếu ta không "khéo" chọn các đường đi cải tiến, thì có thể xảy ra trường hợp để tìm dòng chảy cực đại sẽ tốn rất nhiều công sức và thời gian. Ta lấy một ví dụ minh họa



Nếu trên các đường s, a, b, t và s, b, a, t ta cải tiến lần lượt thay đổi nhau, thì sẽ cần 2.1000 bước để đến đích, còn nếu ngay từ lúc đầu ta chọn đường đi là s, a, t thì ngay trong bước thứ 2 ta đạt dòng chảy cực đại. Kết quả mang tên Edmonds và Karp là hai người đã chỉ ra phải chọn các đường đi cải tiến như thế nào là nhanh nhất.

Định lý 11.1 (Edmonds-Karp)**.** *Nếu trong tất cả các bước đi ta chọn đường cải tiến ngắn nhất thì sau $n \cdot m$ bước đi thuật toán sẽ dừng lại .*

Chứng minh của định lý này có thể tham khảo tại [].
Có rất nhiều thuật toán tìm đường đi ngắn nhất. Các thuật toán này đều phát triển trên cơ sở căn bản là thuật toàn tìm kiếm bình diện.

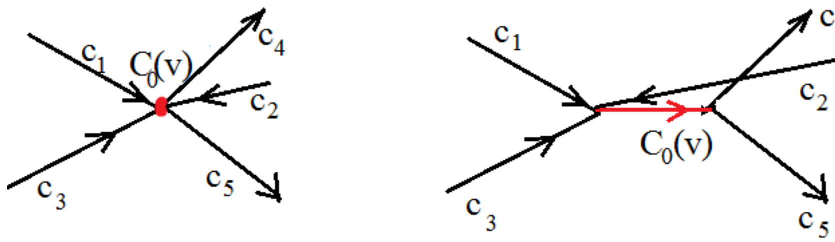
12 Một vài tổng quát hóa (theo hướng tiếp tục gần thực tế)

a) Nhiều nguồn cung cấp $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ và nhiều điểm cuối - tiêu thụ $(t_1, t_2, \dots, t_m)$
Lời giải của trường hợp này đẹp bất ngờ. Ta thêm vào đồ thị hai điểm nhân tạo ζ và τ sao cho $\zeta\mathscr{S}$ được nối với tất cả các điểm s_i và tất cả t_i được nối với τ. Các đường ống mới (nhân tạo này) đều có dung lượng lớn vô cùng. Việc xác định dòng chảy cực đại trong đồ nhân tạo này tương đương với việc xác định dòng chảy cực đại cần tìm trong đồ thị đầu tiên.

b) Ngoài dung lượng ống dẫn $c(x, y)$ còn thêm cả điều kiện các điểm cũng có dung lượng nhất định (hạn chế lưu lượng) $C_0(x)$, tức là với mọi điểm y:

$$\sum_{u|(u,y)\in\mathbb{E}} f(u, y) \leq C_0(y)$$

Trường hợp này cũng có phương pháp thay thế hữu hiệu. Ta lại kiến tạo một đồ thị nhân tạo sao cho mỗi điểm v được thay thế bằng 2 điểm v' và v_{J}. Các cạnh (x, v) (hướng vào v) được thay bằng $(x_\jmath, v')$ và cạnh khởi hành từ v đến u được thay bằng $(v_\jmath, u')$ với dung lượng $c(e)$ tương ứng. Ta thêm cạnh $(v', v_\jmath)$ với dung lượng $C_0(v)$. Xem hình vẽ.



c) **Một vấn đề mở được đặt ra:** *nếu tại các điểm cần thêm điều kiện phải có một lượng nước nhất định tối thiểu đi qua vấn đề sẽ phức tạp hơn nhiều.*

Trong kĩ thuật tìm dòng chảy cực đại, ta cho phép cắt giảm dòng chảy ở một số ống dẫn nghịch hướng để đạt mục đích nâng cao dung lượng dòng chảy, trong trường hợp này có thể một số điểm sẽ không có hoặc dòng chảy tại điểm đó không đạt yêu cầu tối thiểu. Đây cũng là vấn đề mở cần kĩ thuật giải quyết khác