PHÂN TÍCH MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỪ CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2018

Nguyễn Văn Lợi
Hội toán học Hà Nội

Tóm tắt nội dung

Trào lưu thi vào các lớp 10 chuyên và đặc biệt là chuyên toán đã từ lâu là các cuộc cạnh tranh nổi bật. Sau khi phong trào BĐT được giữ ở mức độ thân thiện hơn, thì các bài toán hình học lập tức chiếm ngôi trong cuộc đua kiếm điểm. Hình học phẳng Việt Nam trong phạm vi toán cấp trung học cơ sở nổi tiếng là khó, đây là niềm tự hào của giới chuyên môn, nhưng cũng là gánh nặng của các học sinh lớp 9 khi phải đương đầu với các bài toán hình nhiều khi ngang tầm thi quốc tế. Trước lượng bài ôn luyện khổng lồ, nhiệm vụ cấp bách được đặt ra là: Hãy tìm phương pháp hiệu quả cho cả người học và người dạy môn hình học.

Thông qua việc phân tích và nêu hướng giải quyết một số bài tiêu biểu của kì thi 2018 vừa qua, chúng tôi cũng xin đóng góp một cách tiếp cận các bài toán hình học với phong cách tự tin, ngoài giải xong bài toán chúng ta tự phân tích sâu, tìm nguồn bài toán. Tạo tác phong chủ động học toán hình.

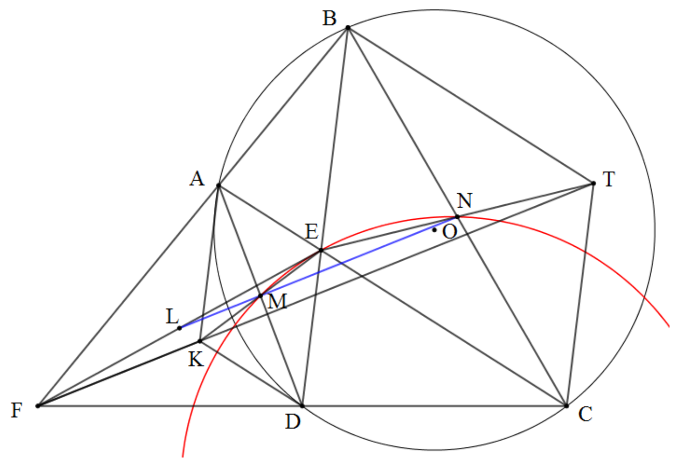
1 Cấu hình đồng dạng

Bài toán 1 (Đề thi vào THPT chuyên, Sở GDĐT Hà Nội 2018). *Cho tứ giác $ABCD$ (không có cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn tâm (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.*

a) *Chứng minh rằng tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.*

b) *Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm đoạn thẳng EF.*

c) *Chứng minh rằng đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.*

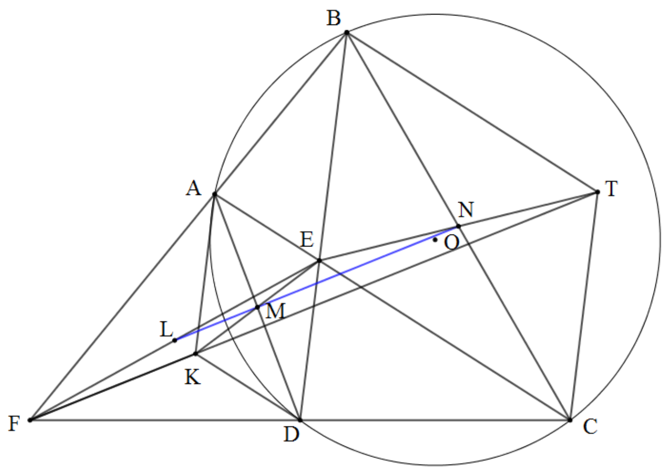


Lời giải và bình luận.

- Gọi d là phép đối xứng qua trục đối xứng là đường phân giác góc $\widehat{BFC}$.
- Gọi f là phép chiếu (phóng đại) tâm F tỉ lệ $k = \dfrac{FD}{FB}$ $\left(= \dfrac{FA}{FC}\right.$ vì $FA \cdot FB = FD \cdot FC$).
- Tích của hai phép biến hình này là $f \circ d \Longrightarrow$ Đây là phép biến hình đồng dạng.

Qua phép biến hình này $D \to B,\ A \to C$. Vậy $\Delta FAD \to \Delta FCB$ do đó các thành phần được vẽ trong tam giác này có ảnh đồng dạng trong tam giác kia. Vì $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{DAK}$ nên ảnh của đường thẳng AK là đường thẳng CA. Tương tự ta có ảnh của đường thẳng DK là đường thẳng BD. Suy ra $K \to E$.
Vì đoạn thẳng AD có ảnh là CB nên trung điểm M có ảnh là N của mỗi đoạn thẳng tương ứng. Ta quay lại bài toán.

1. $\Delta FKD \backsim \Delta FEB$ vì là ảnh của nhau qua $f \circ d$.
2. Đường thẳng Gaus của tứ giác toàn phần $AFDE - BC$.



3. Ta chứng minh phần c) không cần dựa trên kết quả của phần b). ΔFKE có ảnh qua phép biến hình $f \circ d$ là ΔFET nên đồng dạng. Suy ra các góc $\widehat{FEK} = \widehat{FTE} = \widehat{MNE}$. Vậy FE tiếp xúc với đường tròn (EMN). $\square$

2 Tiếp cận cấu hình từ cách nhìn nhận khác

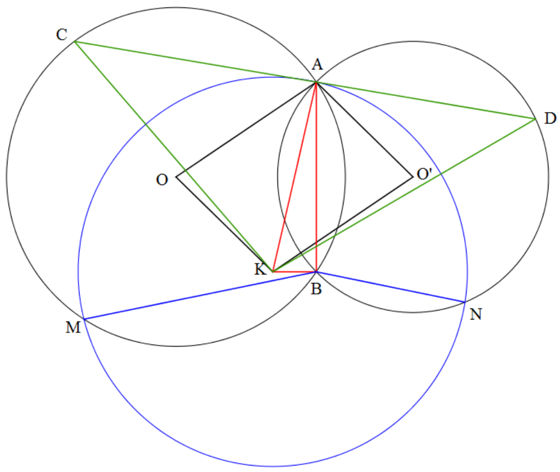
Trong phần này chúng ta xây dựng lại bài toán bằng việc chuyển các cấu hình từ dạng đường tròn về dạng các đường thẳng song song để sử dụng nhóm định lý Thalet.

Bài toán 2 (Đề thi vào THPT chuyên ĐHSP Vinh 2018). *Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ cắt nhau tại hai điểm A và B $(R > r)$ sao cho O và O' ở hai phía đối với đường thẳng AB. Gọi K là điểm sao cho $OAO'K$ là hình bình hành.*

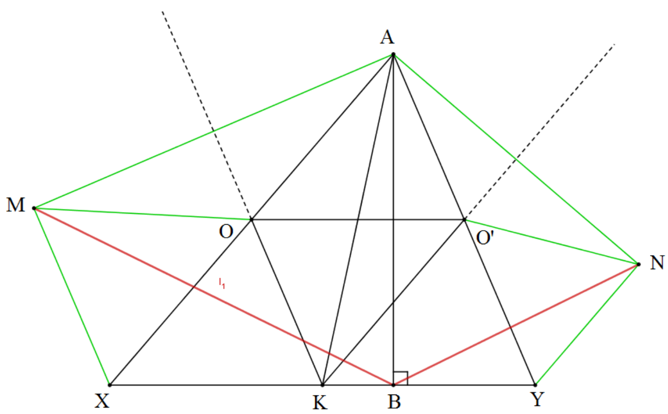
a) *Chứng minh rằng tam giác ABK là tam giác vuông.*

b) *Đường tròn tâm K bán kính KA cắt các đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ theo thứ tự tại M và N (M, N khác A). Chứng minh rằng $\widehat{ABM} = \widehat{ABN}$.*

c) *Trên đường tròn $(O;R)$ lấy điểm C thuộc cung AM không chứa B (C khác A, M). Đường thẳng CA cắt đường tròn (O',r) tại D. Chứng minh rằng $KC = KD$.*



Lời giải bình luận.

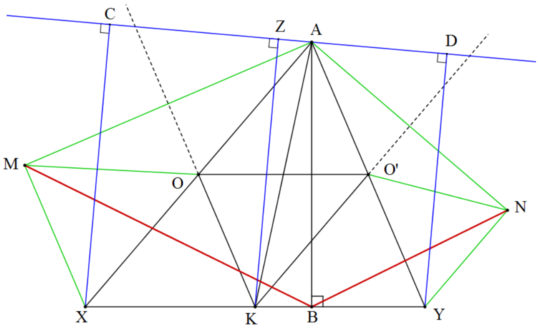


Gọi XY là ảnh của OO' qua phép chiếu tâm A tỉ lệ $1:2$. Vì OO' cắt AK và AB tại điểm giữa của mỗi đoạn, nên KB nằm trên XY. Do đó:

1. $KB \perp AB$ do đó tam giác AKB là tam giác vuông.
2. Cách xác định vị trí của M và N: Vì M là giao của đường tròn (O,R) và đương tròn (K,KA) nên nó là điểm đối xứng trục của A qua trục OK. Tương tự như vậy N và A đối xứng qua trục $O'K$.

Vì M và A đối xứng qua trục KO, $\widehat{AMX} = 90^0 \iff BAMX$ nội tiếp, $\widehat{MAX} = \widehat{MBX}$. Tương tự ta có $\widehat{NBY} = \widehat{NAY}$. Mà $\widehat{MAX} = \widehat{NAY}$ vì có các cặp cạnh tương ứng vuông góc và là các góc nhọn. Do đó $\widehat{XBM} = \widehat{YBN} \iff \widehat{MBA} = \widehat{NBA}$.

3. Cách xác định các điểm C và D từ một dây cung bất kì đi qua A. Vì AX và AY là các đường kính của đường tron (O) và (O') tương ứng, nên các góc $\widehat{XCA} = 90^0 = \widehat{YDA}$. Vậy C và D là chân các đường vuông góc hạ từ X và Y xuống dây cung qua A đã nói. Việc hoàn tất chứng minh đã không còn gì phức tạp.



Vì XC và $YD \perp CD$, $XCDY$ là hình thang vuông có ZK là đường trung bình nên $KC = KD$. $\square$

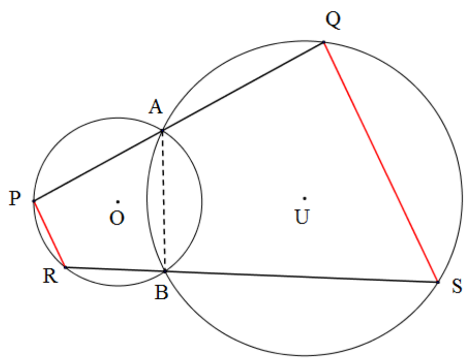
3 Sử dụng sự giúp đỡ bất ngờ của các bài toán đơn giản

Một bài toán quen thuộc nêu lên mối liên hệ của các cát tuyến đến hai đường tròn cắt nhau vô cùng thú vị và có ứng dụng không ngờ khi ta xét các vị trí khác nhau của nó.

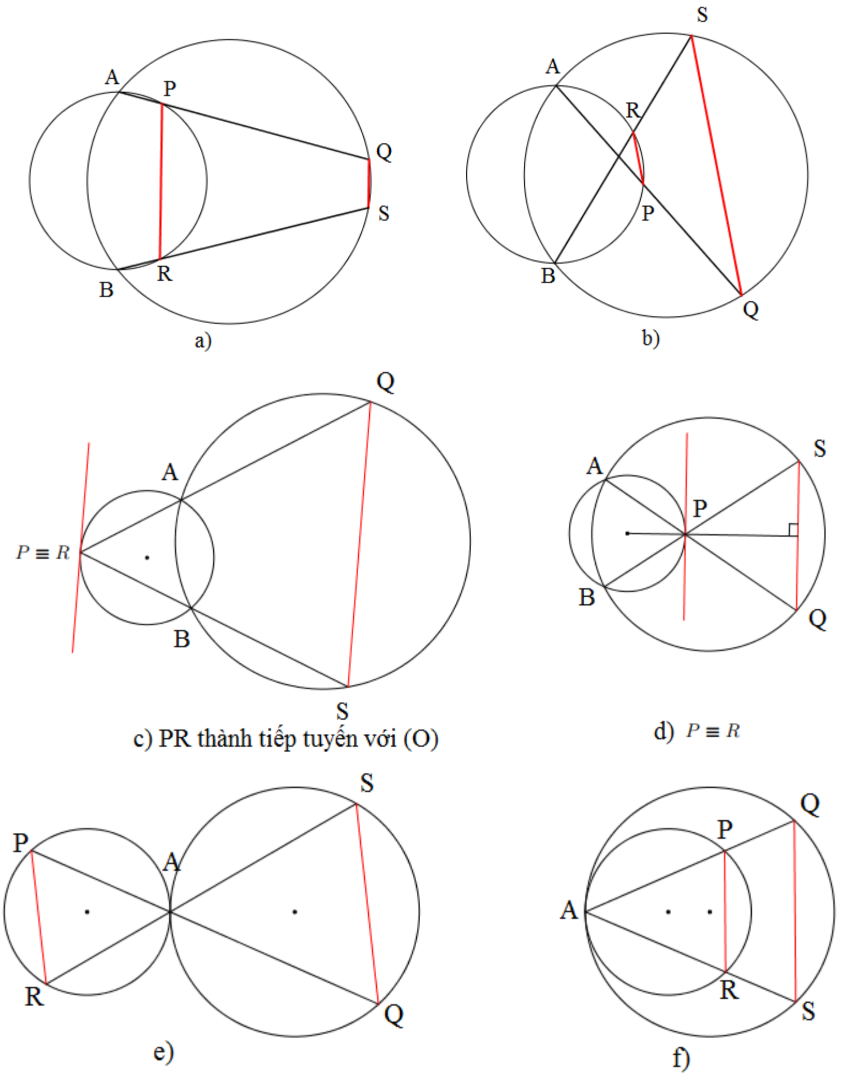
Bổ đề 1. *Hai đường tròn (O) và (U) cắt nhau tại hai điểm A và B. Cát tuyến x qua A cắt (O) tại P, cắt (U) tại Q. Cát tuyến y qua B cắt (O) tại R, cắt (U) tại S. Chứng minh rằng $PR//QS$.*

Mệnh đề ngược lại cũng đúng.

Hai đường tròn (O) và (U) cắt nhau tại hai điểm A và B. Cát tuyến x qua A cắt (O) tại P, cắt (U) tại Q, qua P kẻ PR (R thuộc (O)), qua P kẻ S ($S \in (U)$) sao cho $PR//QS$ khi đó R, B, S thẳng hàng.



Hệ quả 1. Các dạng ứng dụng của bổ đề khi hai cát tuyến ở những vị trí đặc biệt.



a) b) c) PR thành tiếp tuyến với (O) d) $P \equiv R$ e) f)

Bài toán 3 (Đề thi vào THPT chuyên ĐHSP Hà Nội 2018)**.** *Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q. Chứng minh rằng:*

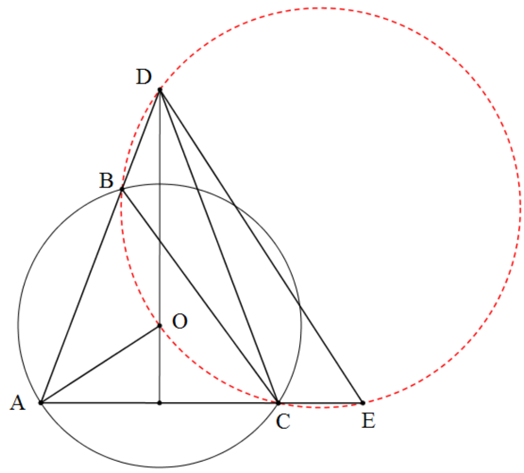
a) $PB = PQ$.

b) O *là trực tâm của tam giác* ADE.

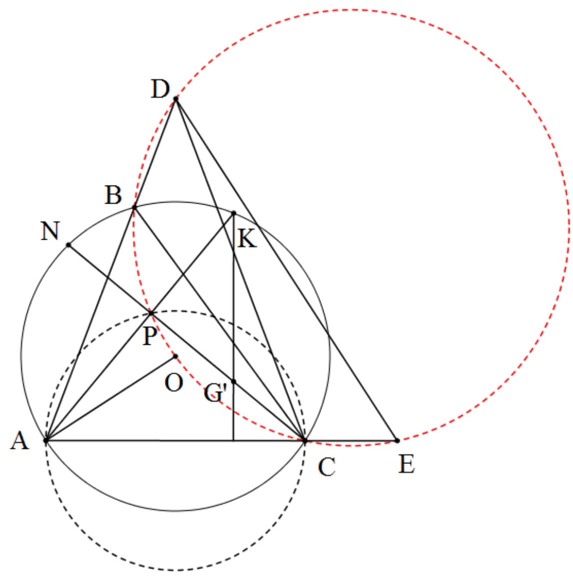
c) $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.

Lời giải và bình luận

Ta có $\widehat{A} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ và $\overset{\frown}{CO} = \overset{\frown}{OB}$ do đó $\widehat{A} + \widehat{BDO} = 90^0$. Vậy $DO \perp AC$ và là phân giác của $\widehat{ADC} \Longleftrightarrow \Delta ADC$ cân tại D và $DM \perp AC$.
Ta đảo trật tự trả lời các câu hỏi của bài toán.



b) Xét hai đường tròn (ABC) và (BCD) và hai cát tuyến là các đường thẳng BD và AC. Theo **bổ đề 1.c** $OA \perp DE \iff O$ là trực tâm của tam giác ADE.
a) Đường thẳng AP cắt (O) tại K (khác A). Đường thẳng kẻ từ K vuông góc với AC cắt CP tại G'. Ta sẽ chứng minh G' chính là điểm G trong đầu bài.



Vì $CP \perp AK$ và $KG' \perp AC$ nên G' là trực tâm tam giác AKC. Gọi N là giao của đường thẳng CP với (O). Theo tính chất trực tâm tam giác $NP = PG'$. Mặt khác:

$$\widehat{CPB} = \widehat{COB} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{BNC} = \widehat{BNC} + \widehat{NBP}$$

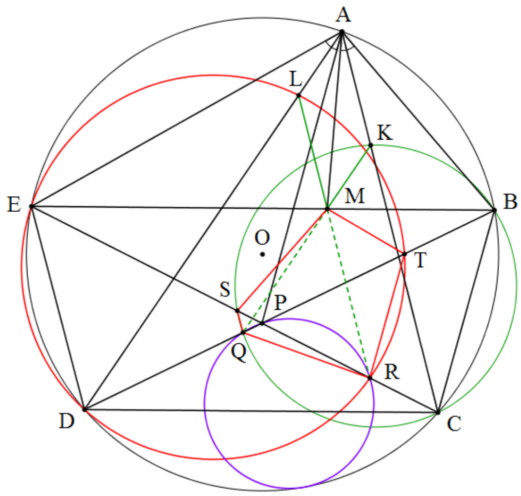
Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{BNC} = \widehat{NBP} \Longrightarrow NPB$ là tam giác cân $\iff BP = PG'$ và NPG' là tam giác vuông $\iff \widehat{BGP} = \widehat{OPC}(= 90^0 - \widehat{BAC})$. Do đó $BG' // PO$. Điểm G' chính là điểm G. $\iff BP = PG$.
c) Theo tính chất trực tâm ta có $\widehat{PAG} = \widehat{OAC}(= 90^0 - \widehat{ABC}) \iff \widehat{PAO} = \widehat{GAC}$.
□
Ghi chú. Trong phần đầu của lời giải chúng ta chứng minh tam giác DAC là tam giác cân tại D. Kết quả này giúp cho lời giải phần b) trở nên độc lập. Kết quả này nên tiếp tục khai thác thêm.

Bài toán 4 (Đề thi vào THPT chuyên KHTN Hà Nội 2018)**.** *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo BD và CE cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{PAE}$. Điểm K thuộc đường thẳng AC sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC lần lượt cắt BD, CE tại Q, S (Q khác B, S khác C).*

a) *Chứng minh rằng ba điểm K, M, Q thẳng hàng.*

b) *Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE lần lượt cắt BD, CE tại T, R (T khác D, R khác E).Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.*

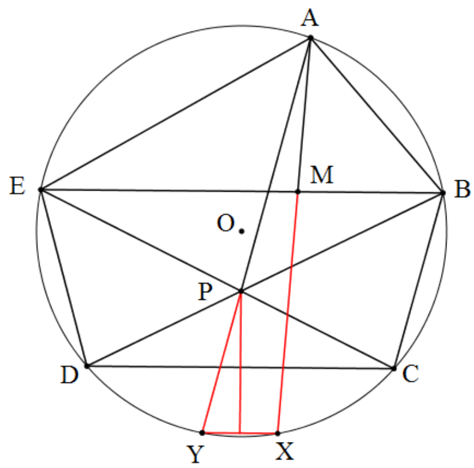
c) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).*



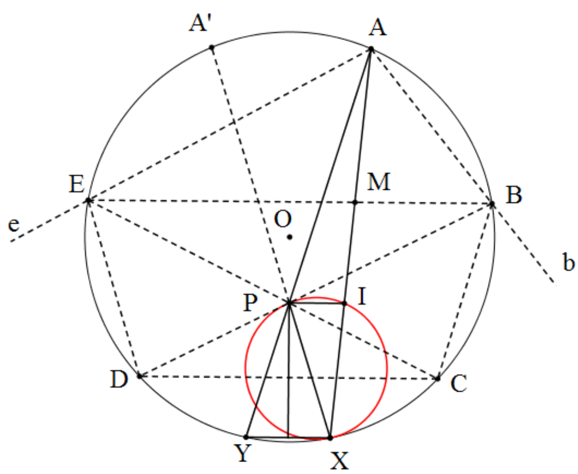
Lời giải và bình luận.

− Phân tích đầu bài.

Kéo dài AM và AP cắt (O) tại X và Y. Ta sẽ tạo một bài toán tương tự nhưng vai trò các điểm P và M từ vai trò là các chốt thụ động thành các điểm chủ động (hình a). Bài toán bắt đầu lại như sau:



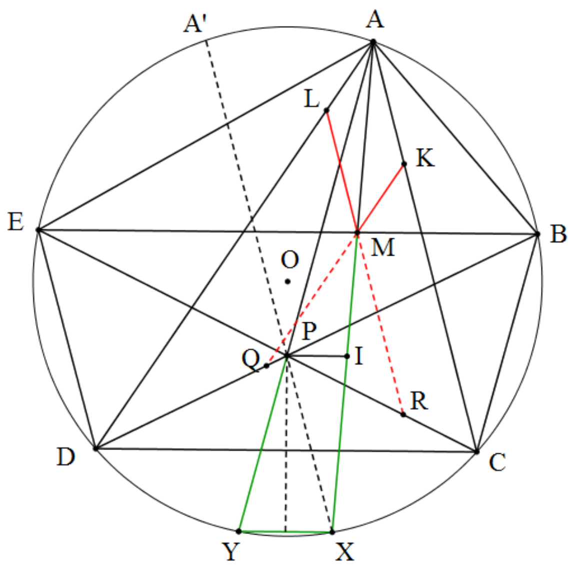
Hình a)



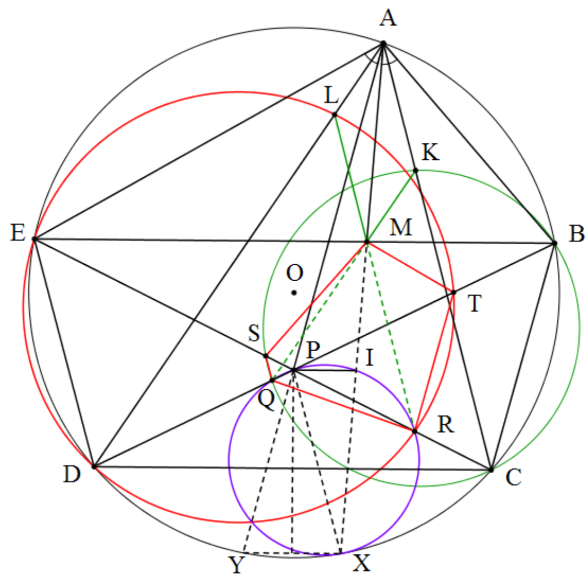
Hình b)

Cho tam giác AXY nội tiếp (O). Tia AB cắt (O) tại B. Tia AE là ảnh của tia AB qua đường phân giác $\widehat{XAY}$ và AE cắt (O) tại E (hình b).

Như vậy điểm P xác định được. Vì P nằm trên đường trung trực BE do đó nằm trên trung trực của XY. Mặt khác P nằm trên AY, do đó là giao của 2 đường này.
(*) Từ P kẻ đường thẳng song song với XY cắt AX tại I. đường thẳng PX cắt (O) tại A' (khác X). Tam giác $\Delta PIX \backsim \Delta AA'X$ qua phép chiếu đồng dạng tâm X tỉ lệ $\dfrac{XP}{XA'} = \dfrac{XI}{XA}$. Vì thế đường tròn (O) và (PIX) cũng là ảnh của nhau qua phép chiếu này. $X \in (O)$ nên chúng tiếp xúc nhau. Nhận xét này làm chứng minh phần $c)$ trở thành đơn giản hơn nhiều.
Ta lấy M là một điểm trên AX và từ đó dựng lại toàn bộ các điểm B, C, D, E của bài toán đầu tiên ($M \in BE//XY$, BP cắt (O) tại P, EP cắt (O) tại C.



1) Sử dụng **Bổ đề 1.b** cho hai đường tròn (DEL) và (O) với 2 cát tuyến ADL và CEQ ta thu được trực tiếp đpcm. Từ đây ta cũng có D, E, L, R nội tiếp một đường tròn.
2) Tiếp tục sử dụng bổ đề trên ta có $SQ//BC, RT//DE$. Từ đó suy ra:



$\widehat{QSR} = \widehat{DEC} = \widehat{DAB} = \widehat{QMR} = \widehat{DBC} = \widehat{QTR}$. Vậy ta có $RQSMT$ nằm trên một đường

tròn.
3) Ta phải chứng minh đường tròn (PRQ) tiếp xúc với (O).
Ta có X, R, M, E thuộc một đường tròn vì $\widehat{XAC} = \widehat{XEC}$ cùng chắn cung XC; $\widehat{XMR} = \widehat{XAC}$ (đồng vị). Từ đó suy ra $\widehat{XRE} = \widehat{XME} = \widehat{PIX}$. Vậy X, P, I, R cùng thuộc đường tròn (PXI). Trong phần xây dựng các điểm (*) ở trên chúng ta đã chỉ ra đường tròn (PIX) tiếp xúc với (O). □

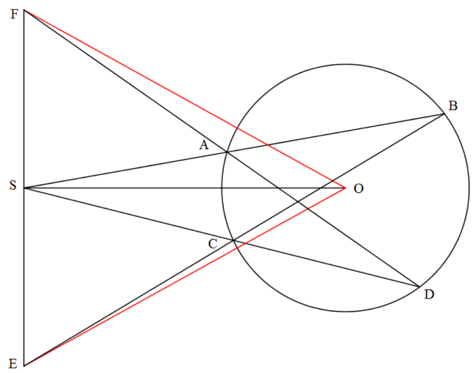
4 Một hướng ra đề chân phương

Đã nhiều năm nay đề thi của các trường phía Nam có phong cách rất trong sáng và vừa sức với các bạn có năng khiếu hình học hoặc không có điều kiện luyện lò, hoặc tự học cũng có thể làm tốt bài thi.

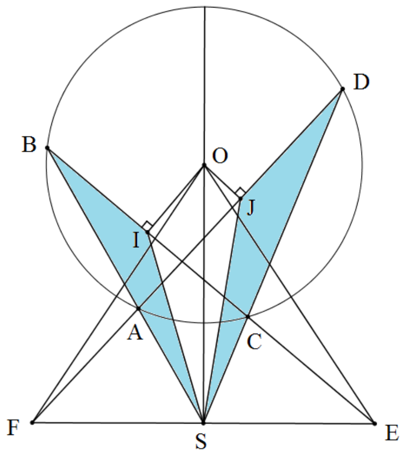
Quan điểm "cũ" với người đã qua và "mới" với người vừa đến là hướng đi thực tế và phù hợp. Các bài toán với kết quả hay có thể tìm các lời giải đẹp tạo được niềm say mê học tập cho học sinh. Hầu hết các trường chuyên phía Nam thoát được cái bẫy dồn học sinh thành thợ giải toán với phương châm ra đề rất nhân văn này.

Chúng tôi xin lấy một ví dụ của một trường có tầm quan trọng tiên phong.

Bài toán 5 (Đề thi vào THPT chuyên ĐHSP tp HCM 2018)**.** Cho đường tròn tâm O và một điểm S nằm ngoài (O). Kẻ các cát tuyến SAB và SCD đến (O) (A nằm giữa S và B, C nằm giữa S và D). Đường thẳng (d) vuông góc với OS tại S cắt các đường thẳng BC và AD tại E và F. Chứng minh rằng $OE = OF$.



Lời giải và bình luận.



Kí hiệu I và J là trung điểm của BC và AD.
Ta có $\Delta SBC \backsim \Delta SDA$ (g.g) $\iff \Delta SBI \backsim \Delta SDJ$ (c. g. c.) $\iff \widehat{SIE} = \widehat{SJF}$. Tứ giác $SFOJ$ nội tiếp (các góc tại S và J là góc vuông) $\iff \widehat{SOF} = \widehat{SJF} = \widehat{SIE} = \widehat{SOE}$. Vậy tam giác FOE cân. □

Các đề bài được lấy từ các đề thi toán lên lớp 10 năm 2018.