TS. Nguyễn Văn Lợi (chủ biên) – Ngô Thị Nhã

BẤT ĐẲNG THỨC

Quyển I

Chương trình bồi dưỡng và phát triển năng lực

ĐỒNG HÀNH CÙNG

LOISCENTER

Mục đích:

Trước 18 tuổi được trang bị kiến thức

- Khoa học Toán - Máy tính
- Kỹ năng lập trình code - hệ thống
- Toán kinh tế - MBA

Đầu tư cho tương lai – Thông minh nhất – Hiệu quả nhất

Đôi lời chia sẻ

Chỉ 10 – 20 năm nữa khi làn sóng công nghệ 4.0 sẽ định hình lại cấu trúc cuộc sống và xã hội. Cái đói nghèo đã được trả về cho quá khứ, lúc đó lao động không còn là để tồn tại mà chủ yếu nhằm mục đích sáng tạo và tiến bộ.

Các công việc sẽ tập trung vào 4 nhóm:

– Nghệ thuật

– Khoa học kỹ thuật

– Dịch vụ

– Sức khỏe và Thể thao

Tùy thuộc khả năng, con người có thể lựa chọn các thể loại công việc phù hợp. Nhưng bất kì công việc gì yếu tố sáng tạo và thi đua sẽ được đưa lên hàng đầu.

Chúng tôi chọn công việc chuẩn bị hành trang *tri thức khoa học kỹ thuật* cho lớp công dân thời đại 4.0 làm nhiệm vụ chính của mình.

Mục lục

1 Làm quen với bất đẳng thức **4**

1.1 Bất phương trình 4

1.2 Trung bình cộng, nhân, bình phương, điều hòa của hai số 5

1.3 Bất đẳng thức trong bất đẳng thức 6

1.4 Trung bình cộng và trung bình nhân của nhiều số 7

2 Các bất đẳng thức quan trọng **8**

2.1 Định lý về các sắp xếp – hoán vị 8

2.2 Bất đẳng thức CBS 8

2.3 Bất đẳng thức Jensen 10

2.4 Một số bất đẳng thức tên tuổi 10

3 Bất đẳng thức sắp xếp – hay còn gọi là BĐT hoán vị **12**

4 Bài tập **16**

4.1 Luyện tập 16

4.2 Các bài tập nâng cao 22

4.3 Các bài toán khác 23

4.4 Bất đẳng thức hình học 24

Hà Nội, ngày 22 tháng 2 năm 2019

1 Làm quen với bất đẳng thức

1.1 Bất phương trình

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{3x+5}{7-3x} < 4;$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} < \dfrac{x^3-1}{x^3+1};$

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{100}.$

2. Các phân số $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, ..., \dfrac{a_n}{b_n}$ có mẫu số $b_i > 0$(i=1,2,...,n). CMR giá trị của phân số $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ nằm giữa giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các phân số $\dfrac{a_i}{b_i}$ đã cho.

3. Dãy số sau dãy nào bị chặn trên, (tức là tồn tại một số K sao cho bất kì phần tử nào của dãy đều có giá trị không vượt quá K). Hãy xác định có tồn tại số K như vậy không và hãy tìm số K nhỏ nhất nếu có thể trong mỗi trường hợp:

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2^n};$

b) $b_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + ... + \dfrac{1}{3^n};$

c) $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n};$

d) $d_n = 1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}.$

4. Dãy $f_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$ có bị chặn hay không?

5. Đáy của một hình thang là a và c. Hãy biểu thị qua a và c các đại lượng sau:

a) Đường trung bình của hình thang.

b) Đoạn thẳng đi qua giao điểm của hai đường chéo, song song với hai đáy và giới hạn bởi hai cạnh bên của hình thang.

c) Đoạn thẳng nào lớn hơn trong các đoạn thẳng xác định trong a và b? Hãy cho chứng minh bằng đại số và hình học.

6 (Vận tốc trung bình, thời gian và quãng đường).

a) Một ô tô đi với vận tốc v_1 trong một thời gian nhất định, và sau đó đi với vận tốc v_2 cũng trong thời gian như vậy. Hỏi trên cả quãng đường xe ô tô đi với vận tốc trung bình là bao nhiêu?

b) Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc v_1, sau đó khi quay lại từ B về A với vận tốc v_2. Hãy xác định vận tốc trung bình của ô tô trong cả hành trình.

7. Tam giác vuông ABC. Đường cao CT chia cạnh huyền AB thành các đoạn $AT = p,\ BT = q$. Hãy biểu thị qua p và q các đại lượng sau:

a) Độ dài đường cao CT; $(\sqrt{p \cdot q})$

b) Độ dài đường trung tuyến CF; $(\dfrac{p+q}{2})$

c) Độ dài hình chiếu vuông góc của CT lên CF. $(\dfrac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}})$

1.2 Trung bình cộng, nhân, bình phương, điều hòa của hai số

8.

a) Chu vi của một hình chữ nhật là P. Diện tích S của hình chữ nhật đó nằm trong khoảng nào?

b) Diện tích của một hình chữ nhật là S. Chu vi P của hình chữ nhật đó nằm trong khoảng nào?

9. Cho a và $b \in \mathbb{R}^+$. Hãy chỉ ra rằng:

a) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$;

b) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$;

c) $\sqrt{a.b} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$;

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nếu $a = b$.

10.

a) Nếu $x \in \mathbb{R}^+$. Hãy chỉ ra rằng:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

b) Nếu $x \in \mathbb{R}$. Hãy chỉ ra rằng:

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$$

11. a, b là các số dương. CMR $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

12. Điểm nào có tọa độ (x, y) là nghiệm của phương trình hiperbol $x \cdot y = 1$ có vị trí ở gần tâm của hệ tọa độ nhất ?

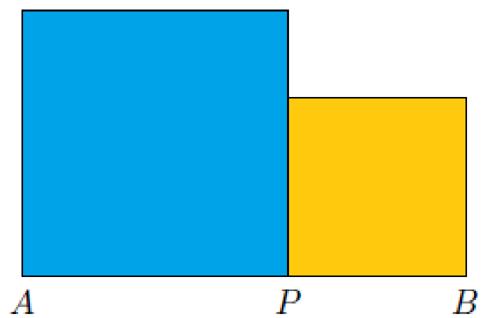
13. Hàm số $g(x)$ trên miền số thực. Giá trị cực tiểu (minimum) của hàm số là bao nhiêu?

$$g(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

14. Chia đoạn thẳng AB thành hai phần sao cho các hình vuông được dựng trên các đoạn thẳng đó (xem hình vẽ) có tổng các diện tích:

a) Nhỏ nhất;

b) Lớn nhất.



15. Nếu tổng của hai số dương không đổi, thì tích của chúng càng lớn khi hiệu của chúng càng nhỏ. Tổng bình phương càng lớn khi hiệu của chúng càng lớn.

16. Các đường thẳng a, b, c và d tạo thành một hình tứ giác. Từ giao điểm của a và b người ta muốn đi đến giao điểm của hai đường kia với cùng một đứa trẻ. Vì vậy người ta phải chọn đường đi ngắn nhất. Đứng từ điểm xuất phát nhìn về hai phía người ta đều thấy ngay rằng trước khi đi được nửa của mỗi đường đều phải rẽ vuông góc tại góc phố gần nhất. Thêm nữa đoạn đường a (có vẻ) dài hơn đoạn đường b. Người ta phải chọn đi đường nào?

17. Nếu $0 < b \leq a$, hãy chỉ ra rằng:

$$\frac{1}{8}.\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{a.b} \leq \frac{1}{8}.\frac{(a-b)^2}{b}.$$

1.3 Bất đẳng thức trong bất đẳng thức

18. Cho a, b, c là các số dương, CMR:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

19. Cho a, b, c là các số dương, CMR:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a+b+c.$$

20. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương sao cho $a_1.a_2.\ldots.a_n = 1$. CMR:

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n$$

21. Nếu $x, y, z \in \mathbb{R}$. CMR:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

22. Cho a_1, a_2, a_3 là các số dương sao cho $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. CMR:

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \sqrt{4a_3 + 1} < 5$$

23. Hàm số hai ẩn $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 1$$

Hãy xác định giá trị cực trị (cực đại, cực tiểu) của hàm số.

24. Chỉ ra rằng $\sqrt{\dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}}$ nằm giữa trung bình cộng $A(x, y)$ và trung bình bình phương $N(x, y)$. Các giá trị trung bình này so với giá trị $\sqrt{A(x, y).N(x, y)}$ có luôn nhỏ hơn hay lớn hơn không? (có)

1.4 Trung bình cộng và trung bình nhân của nhiều số

25. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. CMR:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

Khi nào xảy ra dấu bằng?

26. Chứng minh bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Nghĩa là nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương, thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}$$

khi nào xảy ra dấu bằng?

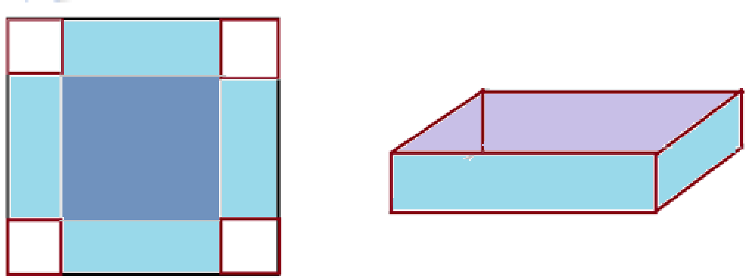
27. Cho x, y là các số dương. CMR $x^3 + y^3 + 1 \geq 3xy$.

28. Số thực λ nhỏ nhất nào sao cho bất đẳng thức $x^4 + y^4 + \lambda \geq 8xy$ luôn luôn đúng với mọi số thực x, y.

29. Hãy chỉ ra rằng với các số dương a, b bất kì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sqrt[n+1]{a.b^n} \leq \frac{a + nb}{n + 1}$$

30. Từ các góc của hình vuông cạnh $30cm$, người ta cắt các hình vuông nhỏ rồi gấp vuông góc các phần còn lại thành một cái hộp mở nắp. Hỏi phải cắt những hình vuông con có cạnh bao nhiêu cm để hình hộp được tạo thành có thể tích lớn nhất?



2 Các bất đẳng thức quan trọng

2.1 Định lý về các sắp xếp – hoán vị

31. Nếu $a_1 < a_2$ và $b_1 < b_2$ thì $a_1.b_1 + a_2.b_2$ và $a_1b_2 + a_2b_1$ đại lượng nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu ?

32. Nếu $a_1 < a_2 < a_3$ và $b_1 < b_2 < b_3$. Các đại lượng

$$\begin{array}{lll}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), & (a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2), & (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3) \\ (a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1), & (a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2), & (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)\end{array}$$

Đại lượng nào

a) Nhỏ nhất?

b) Lớn nhất?

33 (Định lý các sắp xếp hay còn gọi là bất đẳng thức Szucs Adolf)**.** Nếu $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$ và π là một giao hoán của $(1, 2, 3, \ldots, n)$, khi đó:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots. + a_nb_n \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \ldots. + a_nb_{\pi(n)} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots. + a_nb_1.$$

Khi nào xảy ra dấu bằng?

34. Trong hai biểu thức dưới đây a_1, a_2, a_3, a_4 là các số thực bất kỳ. Có thể khẳng định biểu thức bên này luôn lớn hơn bên kia hay không? Nếu đúng hãy chứng minh, nếu sai đưa ra phản ví dụ.

a) ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2$ và $2(a_1a_4 + a_2a_3)$

b) $\dfrac{a_1}{a_4} + \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_2} + \dfrac{a_4}{a_1}$ và $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} + \dfrac{a_4}{a_1}$.

35. Nếu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là các số dương bất kỳ. CMR:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_1} \geq 5$$

36. Cho trước cạnh và đường cao tương ứng thuộc cạnh đó của tam giác. Khi nào chu vi của nó là nhỏ nhất?

2.2 Bất đẳng thức CBS

37. Giá trị của $a_1b_1 + a_2b_2$ thay đổi trong khoảng nào nếu ${a_1}^2 + {a_2}^2 = 1$ và ${b_1}^2 + {b_2}^2 = 1$?

38 (Bất đẳng thức Cauchy – Bunhyakovski – Schwarz)**.** Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ là các số thực bất kỳ. CMR:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2).({b_1}^2 + {b_2}^2 + ... + {b_n}^2)}$$

Trong trường hợp

a) $n = 3$; b) $n > 3 \in \mathbb{N}$

Khi nào xảy ra dấu bằng ?

39. Nếu x_1, x_2, x_3 là các số thực, CMR:

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 \le \frac{1}{2}{x_1}^2 + \frac{1}{3}{x_2}^2 + \frac{1}{6}{x_3}^2 \qquad (1)$$

40. Nếu a_1, a_2, a_3, a_4 là các số thực dương có tổng bằng 1. CMR:

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \sqrt{4a_3+1} \le \sqrt{21}$$

.

41. CMR với $x, y > 0$ thì $\dfrac{(a+b)^2}{x+y} \le \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y}$. Khi nào dấu bằng xảy ra?

42. CMR nếu $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thì

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n} \le \frac{{a_1}^2}{x_1} + ... + \frac{{a_n}^2}{x_n}$$

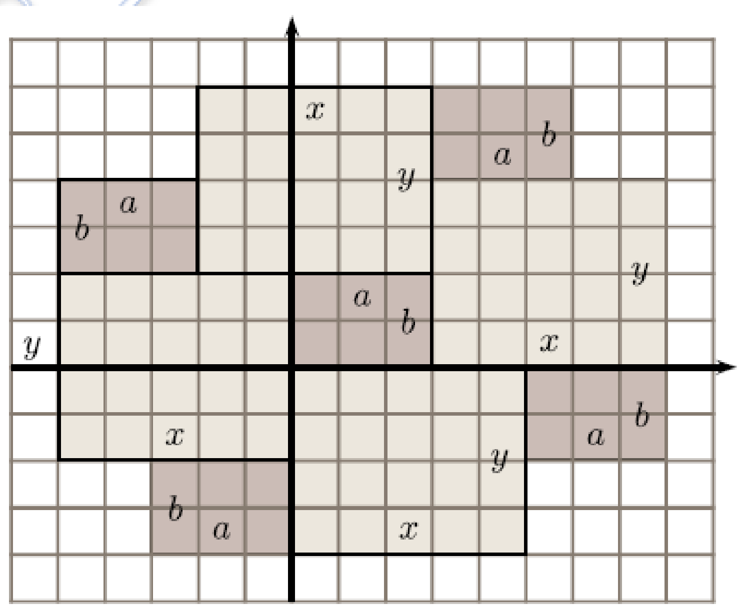
Khi nào xảy ra dấu bằng?

43. CMR BĐT trong bài trước tương đương với bất đẳng thức Cauchy – Bunhyakovski – Schwarz.

44. Cho $a, b, x, y > 0$. Hãy lát mặt phẳng bằng những miếng ván sàn kích thước $(a \times b)$ và $(x \times y)$ (hình vẽ) sao cho các đỉnh của ba hình chữ nhật bao quanh tâm tọa độ, giả sử $y \le b$

$$\{(0;0), (a;b)\}, \{(-x; b-y), (0;b)\}, \{(0;-y), (x;0)\}$$

$(b > y$ làm tương tự). Hãy tìm trên bản vẽ một hình bình hành, để có thể chứng minh bằng phương pháp hình học BĐT CBS trong trương hợp các cặp số dương.



45. Biết rằng $a_1b_1 \geq 1, a_2b_2 \geq 1, \ldots.., a_nb_n \geq 1$ trong đó a_i, b_i là các số dương và các hệ số $p_1, p_2, \ldots., p_n \geq 0$ sao cho $p_1 + p_2 + \ldots. + p_n = 1$. CMR:

$$(a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n)(b_1p_1 + b_2p_2 + ... + b_np_n) \geq 1$$

46. Hãy chứng minh bất đẳng thức CBS cho nhiều số:

$$\left(\sum a_ib_ic_i\right)^2 \leq \left(\sum {a_i}^2\right)\left(\sum {b_i}^2\right)\left(\sum {c_i}^2\right)$$

2.3 Bất đẳng thức Jensen

47.

a) CMR hàm số $f(x) = x^2$ là hàm lồi.

b) Chứng minh BĐT liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình bình phương của nhiều số hạng. Tức là nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số không âm, thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}}$$

48.

a) CMR hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là hàm lồi khi $x \in \mathbb{R}^+$.

b) Chứng minh BĐT liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hòa của nhiều số hạng. Tức là nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số dương, thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$$

49. Hàm lồi nào chứng minh cho mối liên hệ BĐT giữa AM và GM?

2.4 Một số bất đẳng thức tên tuổi

50 (Bất đẳng thức Nesbitt)**.** Nếu a, b, c là các số dương CMR:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

51 (Bất đẳng thức Schur)**.** Cho x, y, z không âm và $r > 0$, thì:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

52 (Bất đẳng thức $AM-GM$ suy rộng)**.** Với các số thực dương $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ và $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng 1 ta có

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq {a_1}^{x_1}{a_2}^{x_2}\cdots{a_n}^{x_n}$$

53 (Bất đẳng thức Holder)**.** Với $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ là các số thực dương ta có (có thể phát biểu với số phần tử hữu hạn)

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3.$$

54 (Bất đẳng thức Chebyshev)**.** Với 2 dãy số thực đơn điệu tăng $a_1,\ a_2,\ a_3$ và $b_1,\ b_2,\ b_3$ ta có (có thể phát biểu với số phần tử hữu hạn)

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3).$$

3 Bất đẳng thức sắp xếp – hay còn gọi là BĐT hoán vị

Rearrangement Inequality

The rearrangement inequality (also known as permutation inequality) is easy to understand and yet a powerful tool to handle inequality problems.

Definition: Let $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ and $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ be any real numbers.

a) $S = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ is called the **Sorted sum** of the numbers.

b) $R = a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1$ is called the **Reversed sum** of the numbers.

c) Let $c_1, c_2, ..., c_n$ be any permutation of the numbers $b_1, b_2, ..., b_n$.

$P = a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n$ is called the **Permutated sum** of the numbers.

55. Rearrangement inequality $S \ge P \ge R$

Proof:
a) Let P(n) be the proposition: $S \ge P$.
P(1) is obviously true.
Assume P(k) is true for some $k \in \mathbb{N}$.
For P(k+1), Since the c's are the permutations of the b's, suppose $b_{k+1} = c_i$ and $c_{k+1} = b_j$
$(a_{k+1} - a_i)(b_{k+1} - b_j) \ge 0$
$\Rightarrow a_ib_j + a_{k+i}b_{k+1} \ge a_ib_{k+1} + a_{k+1}b_j$
$\Rightarrow a_ib_j + a_{k+1}b_{k+1} \ge a_ic_i + a_{k+1}c_{k+1}$
So in P, we may switch c_i and c_{k+1} to get a possibly larger sum.
After switching of these terms, we come up with the inductive hypothesis P(k).
P(k + 1) is also true.
By the principle of mathematical induction, P(n) is true $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) The inequality $P \ge R$ follows easily from $S \ge P$ by replacing $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ by $-b_n \ge -b_{n-1} \ge ... \ge -b_1$.

Note:
(a) If $a_i's$ are strictly increasing, then equality holds (S = P = R) if and only if the $b_i's$ are all equal.
(b) Unlike most inequalities, we do not require the numbers involved to be positive.

56. Corollary 1: Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be real numbers and $c_1, c_2, ..., c_n$ be its permuation. Then

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_n{}^2 \ge a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n$$

57. Corollary 2: Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be **positive** real numbers and $c_1, c_2, ..., c_n$ be its permuation. Then

$$\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + ... + \frac{c_n}{a_n} \ge n$$

The rearrangement inequality can be used to prove many famous inequalities. Here are some of the highlights.

58. Arithmetic Mean - Geometric Mean Inequality (A.M $\geq G.M$)

Let $x_1, x_2, ..., x_n$ be positive numbers. Then $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$.
Equality holds if and only if $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Proof: Let $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$, $a_1 = \dfrac{x_1}{G}, a_2 = \dfrac{x_1 x_2}{G^2}, ..., a_n = \dfrac{x_1 x_2 ... x_n}{G^n} = 1$.
By corollary 2,

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + ... + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + ... + \frac{x_n}{G} <=> \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

Equality holds $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = ... = x_n$.

59. Geometric Mean - Harmonic Inequality (G.M $\geq$ H.M.)

Let $x_1, x_2, ..., x_n$ be positive numbers. Then $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \geq \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}}$

Proof: Define G anf $a_1, a_2, ..., a_n$ similarly as in the proof of A.M - G.M.

By Corollary 2, $n \leq \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + ... + \dfrac{a_n}{a_1} = \dfrac{G}{x_1} + \dfrac{G}{x_2} + ... + \dfrac{G}{x_n}$ which then gives the result.

60. Root Mean Square - Arithmetic Mean Inequality (R.M.S $\geq$ A.M)

Let $x_1, x_2, ..., x_n$ be numbers. Then $\sqrt{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2}{n}} \geq \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

Proof: By Corollary 1, we cyclically rotate x_i,

$$\begin{array}{rcl}
{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 & = & x_1 x_1 + x_2 x_2 + ... + x_n x_n \\
{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 & \geq & x_1 x_2 + x_2 x_3 + ... + x_n x_1 \\
{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 & \geq & x_1 x_3 + x_2 x_4 + ... + x_n x_2 \\
..... & \geq & ..... \\
{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 & \geq & x_1 x_n + x_2 x_1 + ... + x_n x_{n-1}
\end{array}$$

Adding all inequalities together, we have

$$n({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2) \geq (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$$

Result follows. Equality holds $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.

61. Cauchy - Bunyakovskii - Schwarz inequality (CBS inequality)
Let $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ be real numbers.
Then $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2).({b_1}^2 + {b_2}^2 + ... + {b_n}^2)$

Proof: The result is trivial if $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ or $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$. Otherwise, define

$$A = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}, \quad B = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + ... + {b_n}^2}$$

Since both A and B are non-zero, we may let $x_i = \dfrac{a_i}{A}, x_{n+i} = \dfrac{b_i}{B} \forall 1 \le i \le n$.
By Corollary 1,

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{A^2} + \frac{{b_1}^2 + {b_2}^2 + ... + {b_n}^2}{B^2} = {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_{2n}}^2 \\
&\ge x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + ... + x_n + x_{2n} + x_{n+1} x_1 + x_{n+2} x_2 + ... + x_{2n} x_n \\
&= \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)}{AB}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \le ({a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2).({b_1}^2 + {b_2}^2 + ... + {b_n}^2)$$

Equality holds $\Leftrightarrow \quad x_i = x_{n+i} \quad \Leftrightarrow \quad a_i B = b_i A \ \ \forall 1 \le i \le n$.

62. Chebyshev's inequality
Let $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ and $y_1 \le y_2 \le ... \le y_n$ be any real numbers.Then

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \ge \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)(y_1 + y_2 + ... + y_n)}{n} \ge x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1$$

Proof: By Rearrangement inequality, we cyclically rotate x_i and y_i,

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n & = & x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n & \ge & x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1 \\
x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n & \ge & x_1 y_2 + x_2 y_3 + ... + x_n y_1 & \ge & x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1 \\
... & \ge & ... & \ge & .... \\
x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n & \ge & x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1 & = & x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1
\end{array}$$

Adding up the inequalities and divide by n, we get our result.

Exercise	**Hint**
1) Find the minimum of $\dfrac{sin^3x}{cosx} + \dfrac{cos^3x}{sinx}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$	Consider (sin^3x, cos^3x), $\left(\dfrac{1}{sinx}, \dfrac{1}{cosx}\right)$
2) Proof: (i) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (ii) $a^n + b^n + c^n \geq ab^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1}$	For (ii) and questions below, Witout lost of generality, let $a \leq b \leq c$ Consider (a, b, c), $(a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1})$
3) Proof: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq \dfrac{a+b+c}{abc}$	Consider $\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right), \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right)$
4) Proof: $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$	Consider $\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}\right), \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}\right)$
5) Proof: $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c$	Consider $(a^2, b^2, c^2), \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right)$
6) Proof: If $a, b, c > 0$ and $n \in \mathbb{N}$ then : $\dfrac{a^n}{b+c} + \dfrac{b^n}{c+a} + \dfrac{c^n}{a+b} \geq \dfrac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$	Consider $(a^n, b^n, c^n), \left(\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}\right)$
7) Proof: If $a, b, c > 0$, then: $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$	Consider (a, b, c), $(\log a, \log b, \log c)$ and use Chebyshev's inequality

SĐT: 096 568 5459

4 Bài tập

4.1 Luyện tập

63. Cho $a, b > 0$, CMR:
$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

64. Cho $a > b > c$, CMR $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} > 0.$

65. Cho $a > b > c$, CMR $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0.$

66. Cho $a, b > 0$, CMR:
$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

67. Cho a, b bất kì. CMR:
$$a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$$

68. Cho $a, b > 0$, CMR:
$$a^2 + b^2 \leq \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}$$

69. Cho a, b bất kì, CMR:
$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$$

70. Cho a, b bất kì, CMR:
$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^4+b^4}{2}$$

71. Cho a, b bất kì, CMR:
$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$$

Chứng minh các bất đẳng thức sau (82 - 93).

72. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

73. $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$

74. $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab.$

75. $a^4 + 1 > a.$

76. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$

77. $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$

78. $a^2 + b^2 + c^2 + 4 \geq ab + 3b + 2c.$

79. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + ac + ad.$

80. $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\dfrac{2}{5}\ge 0.$

81. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e).$

82. $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\ge \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}$, với $abc\neq 0$.

83. $\dfrac{a^4}{b^4}+\dfrac{b^4}{a^4}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+2$, với $a>0, b>0$.

Cho các số thực dương a, b, c, d. Chứng minh các bất đẳng thức sau (94 - 152).

84.

a) $a+\dfrac{1}{a}\ge 2.$

b) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2.$

c) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2.$

d) $a^2+\dfrac{1}{a^2+1}\ge 1.$

e) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}\ge 6.$

f) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge 3.$

85. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}+\dfrac{16}{d}\ge \dfrac{64}{a+b+c+d}.$

86. $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc.$

87. $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\ge 16abc.$

88. $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\le \dfrac{a+b+c}{2}.$

89. $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b\ge 6abc.$

90. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc.$

91. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc.$

92. $(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc.$

93. $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c.$

94. $abc\ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$

95. $a\sqrt{a^2+c^2}+b\sqrt{b^2+c^2}\le a^2+b^2+c^2.$

96. $ab+bc+ca\ge a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$

97. $a+b+c\ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$

98. $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2.$

99. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge \dfrac{3}{2}.$

100. $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$.

101. $a+b+c\leq\dfrac{a^2+b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2}{2a}+\dfrac{c^2+a^2}{2b}\leq\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}$.

102. $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$.

103. $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq abc(a+b+c)$.

104. $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$.

105. $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$.

106. $ab^5+bc^5+ca^5\geq abc(a^2b+b^2c+c^2a)$.

107. $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

108. $a^4+b^4+8\geq 8ab$.

109. $a^6+b^6+c^6\geq a^5b+b^5c+c^5a$.

110. $a^7+b^7+c^7\geq a^2b^2c^2(a+b+c)$.

111. $a^8+b^8+c^8\geq a^2b^2c^2(ab+bc+ca)$.

112. $a^3b+b^3c+c^3a\geq abc(a+b+c)$.

113. $(a+b)\sqrt{c}+(b+c)\sqrt{a}+(c+a)\sqrt{b}\geq 6\sqrt{abc}$.

114. $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geq(a^3+b^3)^2$.

115. $\left(a+\dfrac{b}{ac}\right)\left(b+\dfrac{c}{ba}\right)\left(c+\dfrac{a}{cb}\right)\geq 8$.

116. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc$.

117. $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$.

118. $\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}\leq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

119. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leq 2(a^3+b^3+c^3)$.

120. $c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)\leq 2(a^3+b^3+c^3)$.

121. $(a+b+c)(ab+bc+ca)\leq 3(a^3+b^3+c^3)$.

122. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\leq 3(a^3+b^3+c^3)$.

123. $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$.

124. $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c$.

125. $8(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

126. $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}<4$, với $a+b+c=1$.

127. $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$, với $a+b+c=1$.

128. $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}<9$, với $a+b+c=2$.

129. $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\geq 64$, với $a+b+c=1$.

130. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<2$, với $a+b+c=1$.

131. $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}<12$, với $\dfrac{3}{2}\leq a\leq\dfrac{50}{3}$.

132. $a^2+b^2+c^2\geq 14$, với $a+2a+3c\geq 14$.

133. $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

134. $a+b+c\geq 3$, với $abc=1$.

135. $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, với $abc=1$.

136. $a^4+b^4+c^4\geq a+b+c$, với $abc=1$.

137. $ab+bc+ca\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, với $abc=1$.

138. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, với $abc=1$.

139. $(a+2b)(b+2c)(c+2a)\geq 27$, với $abc=1$.

140. $(a+1)(b+1)(c+1)\geq 8$, với $abc=1$.

141. $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+ac+bd+ad\geq 10$, với $abcd=1$.

142. $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geq 2^n$, với $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$.

143. Cho p và q dương, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. CMR $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{p(p+1)}+\dfrac{1}{q(q+1)}<\dfrac{1}{2}$ và $1\leq\dfrac{1}{p(p-1)}+\dfrac{1}{q(q-1)}$.

144. Trong một hình vuông cạnh 1 có n hình vuông nhỏ sắp xếp sao cho không có hai hình vuông nào có điểm chung. CMR tổng độ dài các cạnh của hình vuông con không quá $\sqrt{n}$.

145. Trong một khối lập phương có chứa n khối lập phương nhỏ không có hai khối nào có điểm chung trong. CMR tổng độ dài các cạnh của khối lập phương con không quá $n^{\frac{2}{3}}$.

146. Biết $a>b$ và $ab=1$, chỉ ra rằng $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}\geq 2\sqrt{2}$.

147. Biết $a>0, b>0$, CMR $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\geq\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

148. Cho $a,b>0$, chỉ ra rằng:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}$$

149. Cho a, b, c là các số thực dương. CMR:

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} > 2$$

150. CMR với mọi số thực dương a, b, c không thỏa mãn đồng thời các bất đẳng thức sau:

$$a(1-b) > \frac{1}{4};\ b(1-c) > \frac{1}{4};\ c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

151. CMR với mọi số thực dương a, b, c không thỏa mãn đồng thời các bất đẳng thức sau:

$$a + \frac{1}{b} < 2;\ b + \frac{1}{c} < 2;\ c + \frac{1}{a} < 2.$$

152. Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = x + \dfrac{a}{x}, a > 0,$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{x}.$

153. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = (1-x)^3(1+3x)$ nếu $-\dfrac{1}{3} < x < 1$.

154. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (1+x)^3(1-x)$ nếu $0 \le x \le 1$.

155. Phương trình $x^4 - 4x^3 + ax^2 - bx + 1 = 0$ có 4 nghiệm dương. Hãy xác định các giá trị a và b.

156. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \le n(a^4 + b^4 + c^4)$ đúng với mọi số thực a, b, c.

157. Tìm giá trị k lớn nhất sao cho $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \ge k(ab+bc+ca)^2$ đúng với mọi số thực a, b, c.

158. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+2)}\right) < 2$$

159. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+3)}\right) < 3$$

160. Chứng minh rằng:

$$\left(1 - \frac{1}{{p_1}^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{{p_2}^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{{p_n}^2}\right) > \frac{1}{2}$$

161. CMR: $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < 3.$

162. CMR: $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<2.$

163. CMR: $\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+...+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<11.$

164. CMR: $\sqrt{1+\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^3+...+\sqrt{n^n}}}}}<n \qquad (n>1).$

165. CMR: $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}}}<\dfrac{9}{5}.$

166. CMR: $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{...\sqrt{n}}}}}<3$, với $n=2,3,4,...$

167. Chứng minh rằng không tồn tại các số thực x,y,z đồng thời thỏa mãn các bất đẳng thức:

$$|x|<|y-z|;\ |y|<|z-x|;\ |z|<|x-y|.$$

168. Hãy chỉ ra rằng không tồn tại các số thực x,y,z,t sao cho:

$$\begin{array}{ll} |x|>|y-z+t|, & |y|>|x-z+t|, \\ |z|>|x-y+t|, & |t|>|x-y+z|. \end{array}$$

169. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{n!}<\sqrt[n+1]{(n+1)!}, \qquad n=1,2,3,....$$

170. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{n!}<\sqrt[n+1]{n+1}, \qquad n=3,4,5,....$$

171. Phân số $\dfrac{1994^n}{n!}$ có giá trị lớn nhất với n nguyên dương nào?

172. Phân số $\dfrac{19^{+}94^n}{n!}$ có giá trị lớn nhất với n nguyên dương nào?

173. Phân số $\dfrac{n^2}{1,001^n}$ có giá trị lớn nhất với n nguyên dương nào?

174. CMR nếu $a_1,a_2,...,a_n$ dương thì:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right)\geq(n+1)^2.$$

175. Với n nguyên dương, CMR:

$$n(\sqrt[n]{n+1}-1)\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\leq 1+n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

4.2 Các bài tập nâng cao

176. CMR bất đẳng thức sau luôn thỏa mãn với mọi x_1, x_2, x_3:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \geq 0$$

177. Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số dương, CMR:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

178. Ký hiệu $p(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3$ và $q(a,b,c) = a^2b + b^2c + c^2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

I. Nếu a, b, c dương thì $p(a,b,c) \leq q(a,b,c)$

II. Nếu a, b, c dương thì $p(a,b,c) \geq q(a,b,c)$.

Hãy chứng minh hoặc phủ định.

179. Nếu a, b, c là các số dương. CMR:

a) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a + b + c$

b) $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$

180. Nếu a, b, c là các số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} + \sqrt{1 + c^2}$$

181. Nếu a, b, c là các số dương.

a) Hãy chỉ ra rằng $(\dfrac{1}{a} - 1) \cdot (\dfrac{1}{b} - 1) \cdot (\dfrac{1}{c} - 1) \geq 8$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $(\dfrac{1}{a} + 1) \cdot (\dfrac{1}{b} + 1) \cdot (\dfrac{1}{c} + 1)$.

182. Nếu $n \in \mathbb{N}^+$. CMR:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

183. Nếu a, b, c, d là các số dương. CMR:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 2 \cdot \frac{a+c}{b+d}$$

Thỏa mãn khi và chỉ khi nếu mẫu số của các phân số hoặc trùng nhau, hoặc giá trị của phân số có mẫu số lớn hơn cũng không lớn hơn. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc mẫu số của hai phân số bằng nhau, hoặc giá trị của phân số bằng nhau.

184. Xác định giá trị cực tiểu của biểu thức sau, nếu các tham số a_i $(i = 1, \ldots, 2008)$ là các số dương.

$$S = \frac{a_1}{a_{2008} + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_3} + \frac{a_3}{a_2 + a_4} + \ldots + \frac{a_{2008}}{a_{2007} + a_1}$$

185. CMR với n là số nguyên đủ lớn thì $n^2 < 2^n$.

186. CMR với mọi k nguyên dương bất kỳ nếu n là số nguyên đủ lớn thì $n^k < 2^n$.

187. CMR với mọi đa thức $p(n)$ bất kì là số nguyên đủ lớn thi $p(n) < 2^n$

4.3 Các bài toán khác

188. CMR với a, b, c dương:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

189. Cho a, b, c dương. CMR:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{a^3}.\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{b^3}.\sqrt{\frac{c}{b}}+\frac{1}{c^3}.\sqrt{\frac{a}{b}}$$

190. Giải phương trình trên miền số thực: $2x^3 = x^4 + \dfrac{27}{16}$

191. Diện tích của một tứ giác lồi là $32cm^2$, tổng của một đường chéo và hai cạnh đối diện là $16cm$. Tính độ dài của đường chéo kia?

192. Cho m, n nguyên dương, x dương. CMR:

$$m.x^n + nx^{-m} \geq m+n$$

(kết quả vẫn đúng khi n là số thực dương).

193. Cho a, b, c là các số nguyên dương (thực dương cũng đúng). CMR:

$$a^a.b^b.c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$$

194. a, b, c là những số thực khác 0. CMR:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

195. Cho a_i với i=1,2,...,n là các số dương. CMR:

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+...+a_n} \leq {a_1}^{a_1}.{a_2}^{a_2}...{a_n}^{a_n} \leq \left(\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+....+{a_n}^2}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^{a_1+a_2+...+a_n}$$

196. BĐT Bernulli
Cho $a > -1$ và $a \neq 0$, $q > 0$, $q \neq 0$. CMR:

$$\begin{cases}(1+a)^q > 1+qa & \text{nếu } q > 1\\ (1+a)^q < 1+qa & \text{nếu } q < 1\end{cases} \qquad (1)$$

197. CMR: Nếu $n > 1$ và n tự nhiên: $n^n > (n+1)^{n-1}$.

198. Nếu x, y là các số dương, n là số tự nhiên lớn hơn 2. CMR:

$$x^n \geq y^{n-1}(nx-(n-1).y)$$

199. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^5} - 3x$.

200. Nếu $a_i > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ CMR:

$$({a_1}^{a_1}.{a_2}^{a_2}\ldots.{a_n}^{a_n})^n \geq (a_1.a_2\ldots a_n)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

201. Nếu p, q là các số nguyên dương lớn hơn 1, CMR:

$$\frac{(n-1)^2.pq + (n-1).(p+q) + 1}{n} \leq (n-1).pq + 1$$

202. CMR với n tự nhiên lớn hơn 1:

$$\frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-4} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

203. Cho a_i và b_i với $i = 1, 2, \ldots, n$ là các số thực dương. CMR:

$$\sum_1^n \frac{{a_i}^2}{b_i} \leq \sum_1^n b_i \text{ thì} \sum_1^n a_i \leq \sum_1^n b_i$$

204. Với a, b, c, d là các số dương. CMR:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

4.4 Bất đẳng thức hình học

205. Tam giác ABC chứa tam giác MNL. Chứng minh rằng:

a) Chu vi của tam giác ABC lớn hơn hoặc bằng chu vi tam giác MNL.

b) Diện tích tam giác ABC lơn hơn diện tích tam giác MNL.

Trong cả hai trường hợp khi nào dấu bằng xảy ra?

206. (Điểm Fermat − Toricelli)
Xác định điểm P trong tam giác ABC sao cho tổng khoảng cách từ P đến các đỉnh của tam giác là nhỏ nhất.

207. (Bài toán Fagnano − chân ba đường cao).
Một tam giác được gọi là **nội tiếp trong một tam giác khác** nếu mỗi đỉnh của tam giác này nằm trên một cạnh khác nhau tương ứng của tam giác kia.
Cho trước tam giác nhọn ABC. Trong tất cả các tam giác nội tiếp trong tam giác ABC, tam giác nội tiếp có các đỉnh là chân của ba đường cao của tam giác ABC là tam giác có chu vi nhỏ nhất.

208. ĐỊNH LÝ (Công thức EULER − BĐT về bán kính).
Cho tam giác nhọn ABC. Bán kính vòng tròn tâm O ngoại tiếp ABC và bán kính vòng tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC lần lượt là R, r. Khoảng cách $OI = d$. CMR:

a) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (công thức EULER).

b) $R \geq 2r$ (BĐT bán kính).

209. (Bất đẳng thức POTOLEME).
Các cạnh của một tứ giác lồi theo thứ tự lần lượt là a, b, c, d. Hai đường chéo là e và f. CMR $ac + bd \geq ef$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác là hình nội tiếp trong vòng tròn.

210. (Bất đẳng thức ERDOS − MORDELL).
Cho P là một điểm thuộc tam giác ABC (P có thể nằm trong hay nằm trên chu vi của tam giác). Khoảng cách từ P đến A, B, C lần lượt là u, v, w: khoảng cách từ P đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là x, y, z. Khi đó:

$$u + v + w \geq 2(x + y + z)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi P là trọng tâm của tam giác đều ABC.

211.

a) Trong các tam giác có cùng chu vi tam giác đều có diện tích lớn nhất.

b) Trong các tam giác cùng diện tích tam giác đều có chu vi nhỏ nhất.

212. Chứng minh rằng bất kỳ một tam giác nhọn nào có diện tích bằng 1 cũng có thể đặt được trong môt tam giác vuông có diện tích không quá $\sqrt{3}$.