N. V. Loi

A) KHỐI LẬP PHƯƠNG - CUBES

B) HÌNH HỌC TAXI

Mục lục

Phần I

Khối Lập Phương và Các Bài Toán Liên Quan

Khối lập phương và các bài toán liên quan là một đề tài thú vị hấp dẫn và luôn luôn trẻ, luôn là lời thách thức đối với học sinh và cả giáo viên. Trong đề án này song song với mục đích tổng hợp, phân loại và hệ thống hóa các kết quả quan trọng của các nghiên cứu tập trung về khối lập phương, chúng tôi còn đưa mục tiêu dễ dạy dễ học và khơi nguồn cảm hứng cho các phát triển tiếp theo.

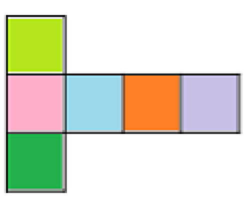
Những bài toán liên quan đến khối lập phương thì rất nhiều, nhưng những tài liệu tổng kết và phân loại bằng tiếng Việt rất ít, một phần do hạn chế về in mầu cũng như công cụ thể hiện, vì đề tài này đòi hỏi nhiều minh họa bằng hình vẽ có mầu sắc. Trong giảng dạy chúng ta cũng cảm thấy vấn đề phẳng và không gian có mốc phân cách chính là khối lập phương. Làm bạn được với cách nhìn và suy nghĩ lập phương thì việc chiếm lĩnh nhãn quan và phương pháp của toán hiện đại trở thành gần gũi. Đây là bản tiếng Việt được chuyển từ bản tiếng Anh [1] trong kỉ yếu chào mừng cuộc thi HOMC trở thành cuộc thi quốc tế. Trong bài này, chúng tôi có thêm phần các phép quay đối xứng của hình lập phương. Một số chứng minh được bổ xung để phục vụ tốt hơn cho người đọc.

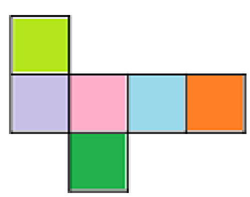
1 Trải khung hình lập phương lên mặt phẳng

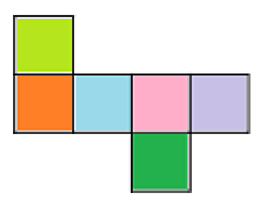
Bài toán 1. *Hãy chỉ ra rằng có 11 khung của hình lập phương. Các trường hợp có thể nhận được nhau từ phép quay hoặc đối xứng không tính là khác nhau.*

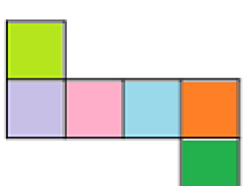
Lời giải: Chúng ta có thể liệt kê các khung hình lập phương theo cách phân chia các trường hợp riêng biệt. Khi trải khung hình lập phương lên mặt phẳng có các trường hợp sau:

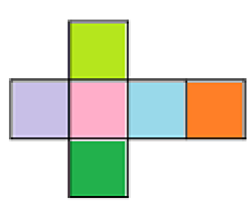
a) Có 4 hình vuông được xếp thành hàng. Không thể có từ 5 trở lên số hình vuông được xếp thành một hàng, vì khi gấp lại thành khối sẽ có hai mặt nằm trùng lên nhau. Ta có 6 kiểu khung được kí hiệu từ 1) đến 6).

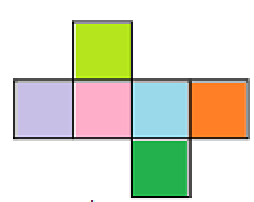

1)


2)

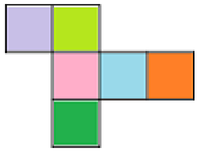

3)

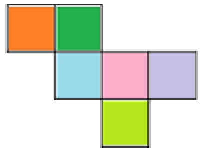

4)

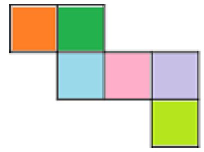

5)

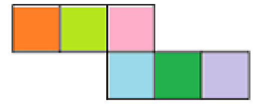

6)

b) Chỉ có đúng 3 hình vuông được xếp thành một hàng. Ta nhận được các khung gồm 3 dòng $(2, 3, 1)$ các ô vuông theo hình 7), 8), 9) và một hình 2 dòng $(3, 3)$ ô vuông theo hình 10).

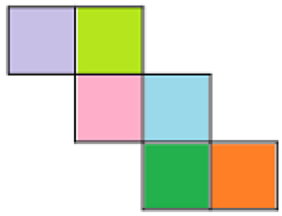

7)


8)


9)


10)

c) Cuối cùng còn một hình gồm 3 dòng $(2, 2, 2)$ ô vuông như ở hình 11).

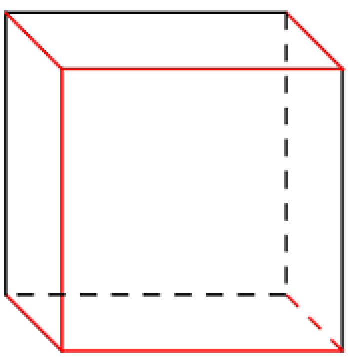

11)

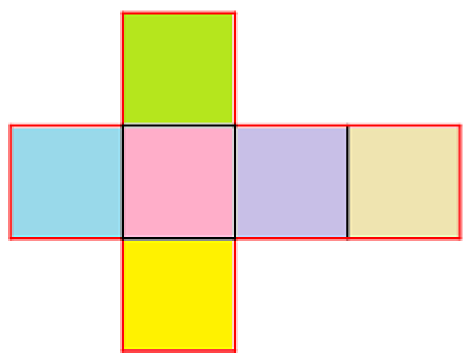
Từ các khung trên chúng ta chỉ việc gấp lại sẽ nhận được hình lập phương.

Câu hỏi được đặt ra:

Bài toán 2. *Cắt một hình lập phương theo các cạnh nào để khi trải ra ta nhận được khung lập phương?*

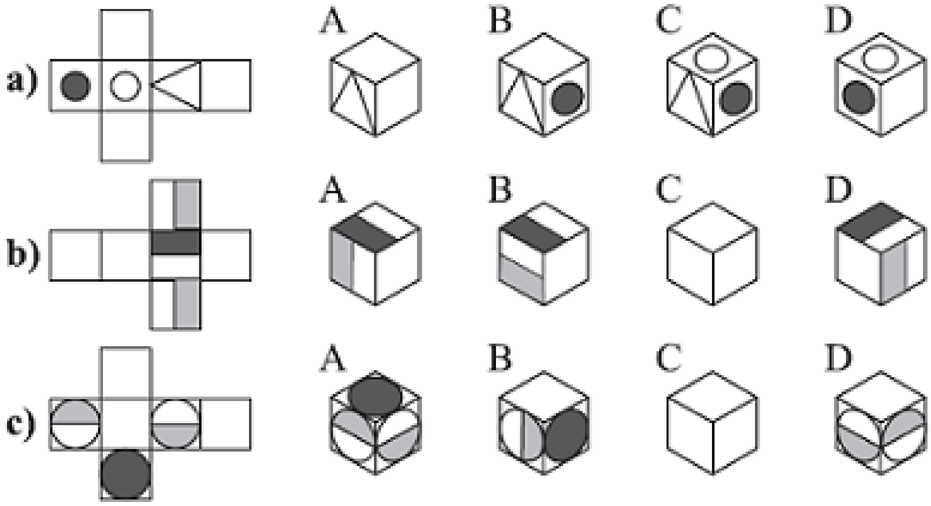
Hướng dẫn: Minh họa theo hình vẽ.



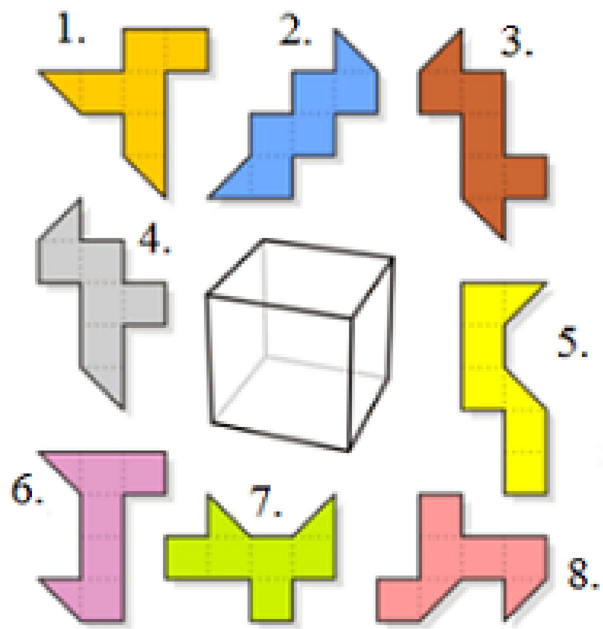


Exercise 1.1. Cắt các hình lập phương theo các cạnh tương ứng để nhận được các khung lập phương từ 1) đến 11).

Exercise 1.2. Trong hình sau đây hình bên tay trái là hình trải phẳng của hình nào từ các khối A, B, C, D được cho ở bên phải?



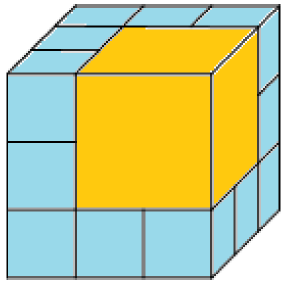
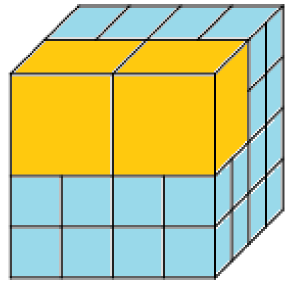
Exercise 1.3. Trên hình là các khung gồm 5 hình vuông và 2 hình tam giác. Hỏi những khung nào có thể gấp lại cho ta hình lập phương?



2 Khối lập phương

Bài toán 3. *Có thể cắt một khối lập phương thành* 20 *khối lập phương nhỏ? Thành* 50 *khối lập phương nhỏ được không?*

Lời giải: Có thể được cho cả hai trường hợp.
Xuất phát từ: $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$. Có thể cắt từ 1 tạo thành 8, 27, 64 khối lập phương nhỏ hơn. Chiều ngược lại sẽ là ghép các khối nhỏ thành $64 \to 1$, $27 \to 1$, $8 \to 1$ khối lớn hơn.

Do đó:

$$20 = 27 - (8-1) = 27 - 7.$$
$$50 = 64 - 2 \cdot (8-1) = 64 - 2 \cdot 7.$$

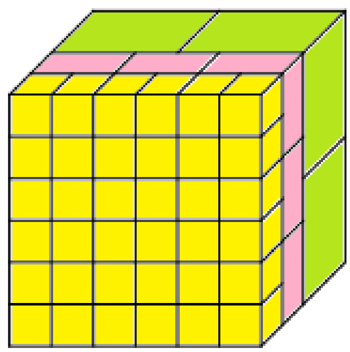
Bài toán 4. *Có thể cắt một khối lập phương thành 48 khối lập phương con được không?*

Đáp số: Có thể.

$$27 + 3 \cdot (8-1) = 27 + 3 \cdot 7 = 48.$$

Bài toán 5. *Có thể cắt một khối lập phương thành 49 khối lập phương nhỏ hơn được hay không?*

Đáp số: Có thể.



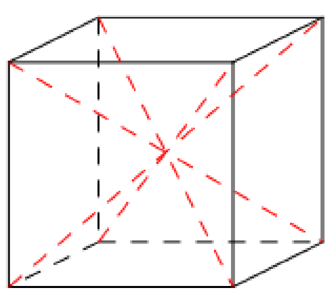
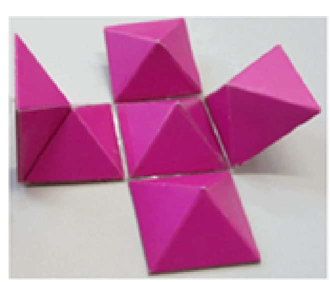
Dùng khối hộp cạnh 6 đơn vị $(6 \times 6 \times 6)$. Chia thành $6 \times 6 = 36$ khối đơn vị $(1 \times 1 \times 1)$; $3 \times 3 = 9$ khối $(2 \times 2 \times 2)$ và $2 \times 2 = 4$ khối $(3 \times 3 \times 3)$. Khi đó $36 + 9 + 4 = 49$.

Exercise 2.1. Với giá trị nào của n thì có thể cắt một khối lập phương thành n khối lập phương nhỏ?

Exercise 2.2. Có thể cắt một khối lập phương thành những hình chóp giống hệt nhau được không? Có thể cắt được thành 3 hình chóp giống hệt nhau được không?

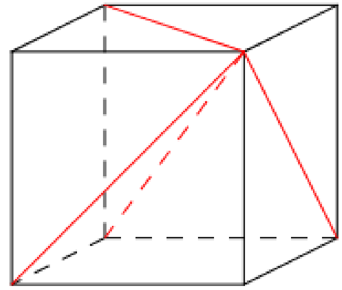
Lời giải:

a) Có thể.

Nối tâm của khối lập phương với tất cả các đỉnh ta được 6 hình chóp trùng khít nhau.

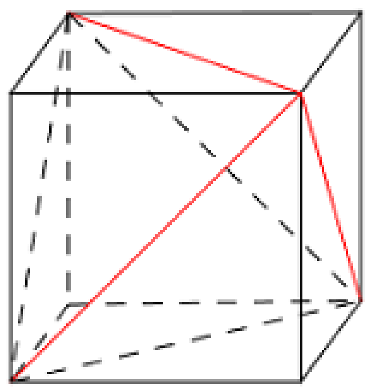
b) Có thể.



Nối các đỉnh của một mặt với một đỉnh khác không nằm trên mặt đó và tiếp tục như vậy ta được 3 hình chóp trùng khít nhau.

Bài toán 6. *Một khối lập phương được chia thành các tứ diện. Hỏi ít nhất nhận được bao nhiêu tứ diện?*

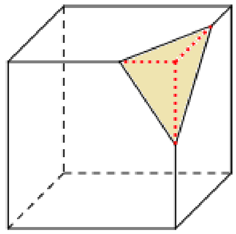
Lời giải: Mỗi mặt của khối lập phương là hình vuông, nên cần ít nhất chia thành 2 phần. Chọn hai mặt (của khối lập phương) đối diện nhau. Như vậy có 4 tam giác mà không có 2 tam giác nào ở cùng một tứ diện, các tứ diện có mặt là một trong bốn tam giác này có tổng thể tích không quá $\frac{2}{3}$, do đó cần nhiều hơn 4 tứ diện.



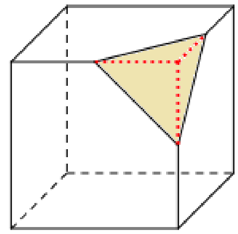
Cắt thành 5 tứ diện có thể được. Chọn 4 đỉnh không có 2 đỉnh nào được nối với nhau. Ta được một tứ diện đều. Với 4 mặt của tứ diện này được ghép với 4 tứ diện khác và phủ hoàn toàn khối lập phương (như trên hình vẽ).

3 Cắt hình lập phương bằng mặt phẳng

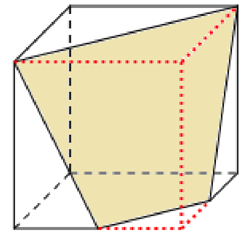
Bài toán 7. *Các mặt cắt có thể của mặt phẳng với khối lập phương.*



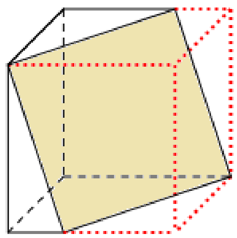
Hình tam giác



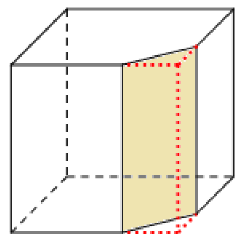
Tam giác đều



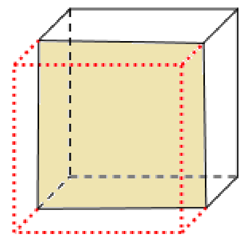
Hình thang



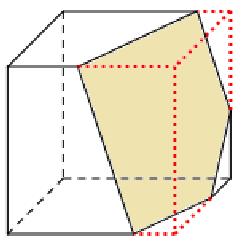
Hình bình hành



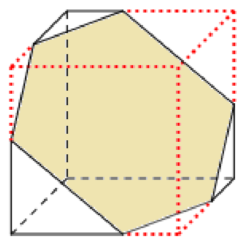
Hình chữ nhật



Hình vuông



Hình ngũ giác



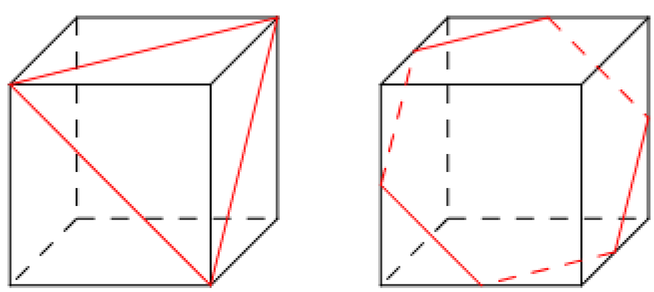
Hình lục giác

Bài toán 8. *Mặt cắt của hình lập phương và mặt phẳng có thể là:*

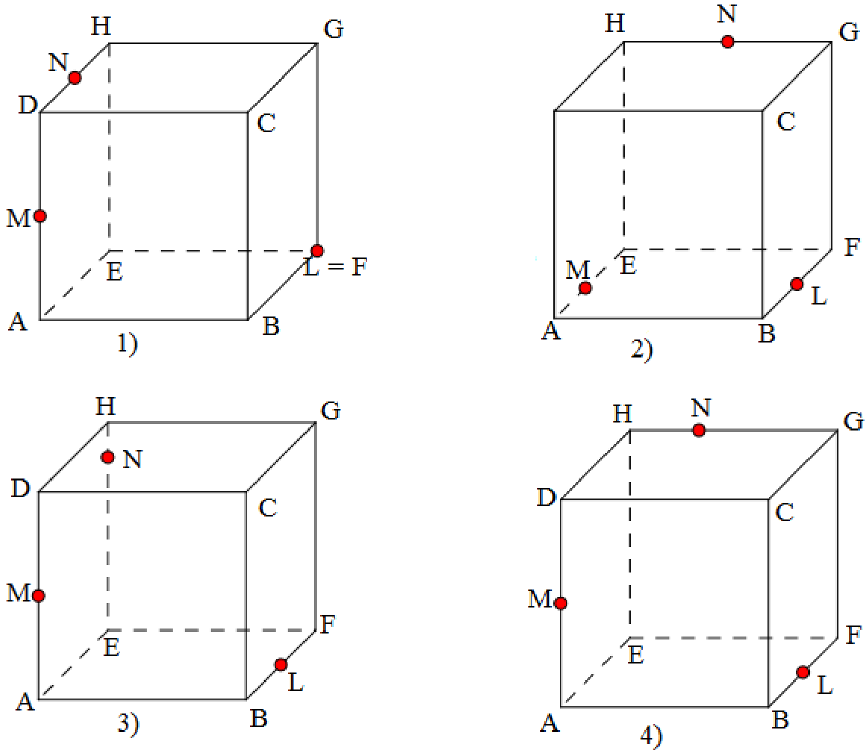
a) Tam giác đều?

b) Lục giác đều được hay không?

Lời giải: Minh họa bằng hình vẽ.



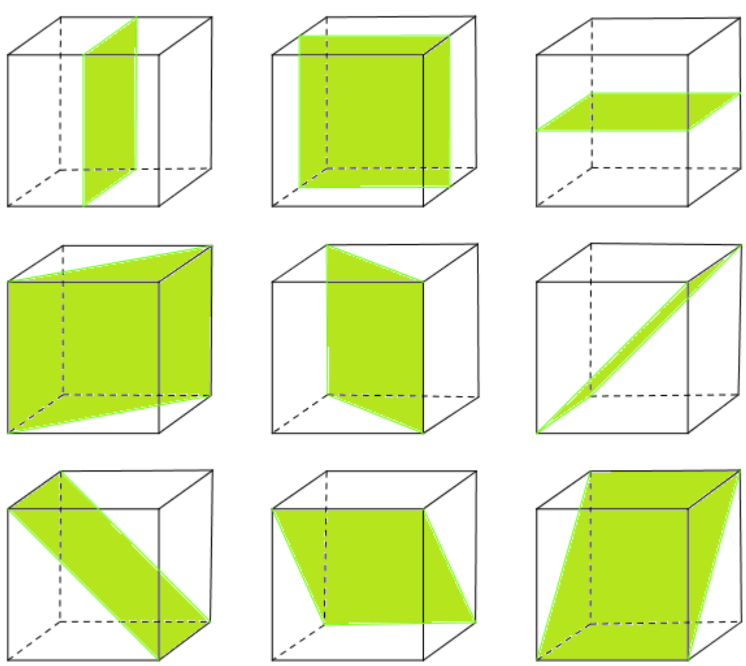
Bài toán 9. *Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Hãy dựng thiết diện của mặt phẳng (p) đi qua 3 điểm M, N và L (trên hình vẽ) và hình lập phương.*



4 Đối xứng mặt, trục, các phép quay quanh trục của khối lập phương

Bài toán 10. *Khối lập phương có bao nhiêu mặt đối xứng?*

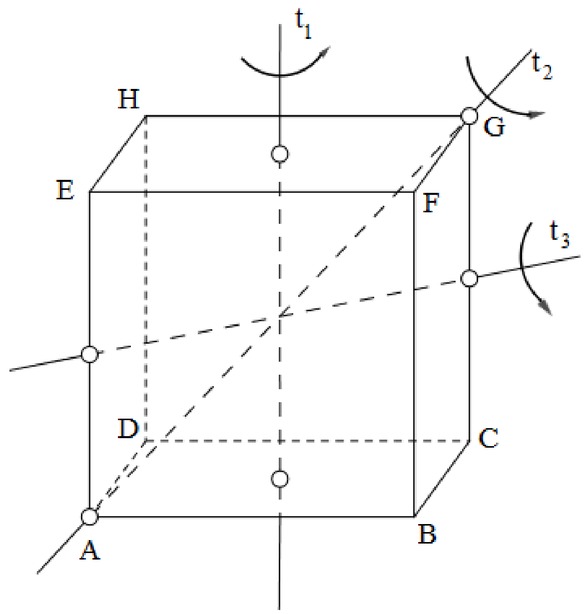
Lời giải: Khối lập phương có 2 loại mặt phẳng đối xứng. Loại vuông góc với cạnh (3 mặt phẳng) và loại vuông góc với đường chéo của mặt (6 mặt phẳng). Tổng cộng là 9 mặt phẳng đối xứng như trong hình dưới đây.



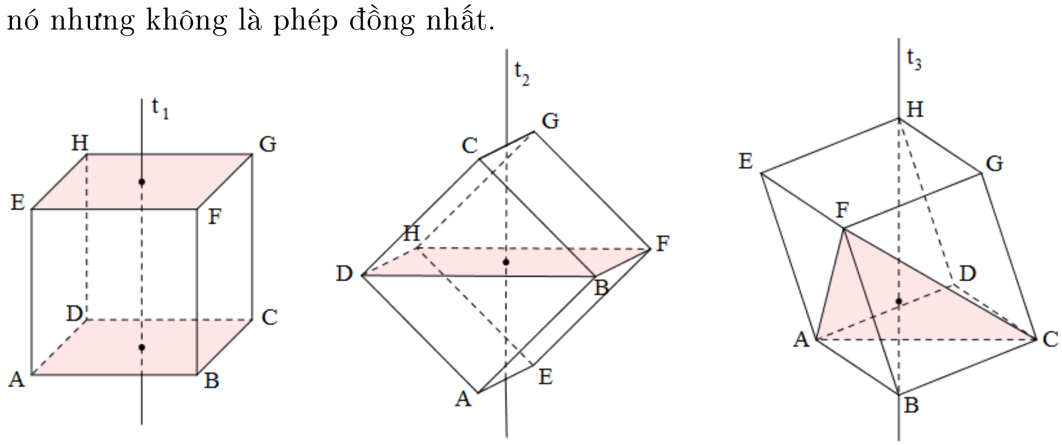
Bài toán 11 (Trục quay)**.** *Khối lập phương có bao nhiêu loại trục quay? Mỗi loại có bao nhiêu trục? Mỗi loại trục quay có cấp độ đối xứng quay là bao nhiêu?*

Ghi chú: Số lần quay quanh trục để hình trở lại vị trí ban đầu được gọi là cấp độ đối xứng của phép quay.

Lời giải: Một khối lập phương có 3 loại trục quay.



Loại 1 − ký hiệu là t_1: Có 3 trục đi qua tâm của các mặt đối diện. Có cấp độ đối xứng là 4 (sau khi quay 4 lần 90^0 thì trở lại vị trí ban đầu). Vì thế có $3 \times 3 \times 3$ cách quay để khối lập phương biến đổi thành chính nó (nhưng không phải tất cả các điểm thành chính nó).
Loại 2 − ký hiệu là t_2: Có 6 trục mà mỗi trục đi qua các trung điểm của một cặp cạnh đối diện (khối lập phương có 12 cạnh chia thành 6 cặp cạnh đối diện trong không gian). Cấp độ đối xứng trục là 2 (quay 180^0). Vậy có 6×1 cách quay.
Loại 3 − ký hiệu là t_3: Có 4 trục quay là 4 đường chéo khối. Loại này có cấp độ đối xứng là 3 (quay 120^0). Như vậy loại này có 8×2 cách biến hình.
Như vậy có tổng cộng 13 trục quay và $9 + 6 + 8 = 23$ phép quay biến khối lập phương thành chính nó nhưng không là phép đồng nhất.



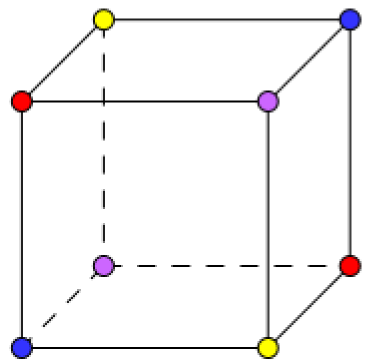
Ghi chú: Ngoài các mặt phẳng đối xứng, các trục quay khối lập phương còn có tâm đối xứng chính là tâm của khối lập phương. Các phép biến hình này tạo thành nhóm octahedron có 48 phần tử.

Exercise 4.1. Lập bảng biểu diễn tích của các phép quay đối xứng đã cho trong bài trên.

5 Tô mầu

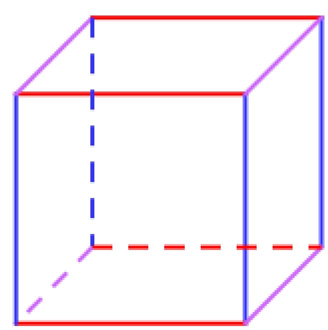
Bài toán 12. *Cần ít nhất bao nhiêu mầu để tô các đỉnh của khối lập phương sao cho các đỉnh được nối với nhau (có cạnh chung) thì có màu khác nhau?*

Lời giải: Cần 4 mầu.



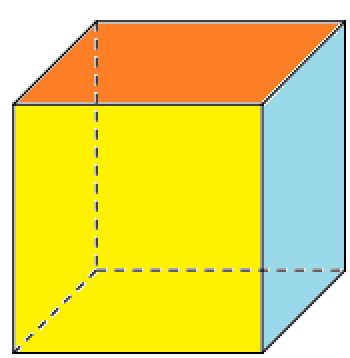
Bài toán 13. *Cần ít nhất bao nhiêu mầu để tô các cạnh của khối lập phương sao cho các cạnh có chung đỉnh thì có màu khác nhau?*

Lời giải: Cần 3 mầu.



Bài toán 14. *Cần ít nhất bao nhiêu mầu để tô các mặt của khối lập phương sao cho các mặt có chung cạnh thì có màu khác nhau?*

Lời giải: Cần 3 mầu.



Bài toán 15. *Có bao nhiêu cách tô các mặt của khối lập phương thành các màu đen và trắng sao cho mỗi mặt chỉ một màu và các vị trí nhận được từ phép quay không tính là khác nhau?*

Lời giải: Sơn các mặt của hình lập phương bằng đúng hai mầu đen trắng mỗi mặt chỉ một mầu thì có 8 cách, nếu cả hai cách thuần tất cả chỉ toàn trắng hoặc toàn đen thì thêm 2 cách nữa. Tổng cộng $8+2$ cách. Ta đếm theo số mặt đen được sơn (tất nhiên các mặt con lại được sơn trắng).

Một mặt đen có 1 cách. Hai mặt đen có hai cách hoặc cạnh nhau, hoặc đối diện. Ba mặt mầu đen: xuất phát từ 2 mầu nếu đã có hai mặt đối diện đen thì thêm một mặt nữa như vậy thêm một cách. Nếu hai mặt đen cạnh nhau thì thêm một cạnh sao cho thành 3 mặt đen có chung đỉnh $-$ như vậy cũng thêm một cách. Tiếp nữa quay lại xét mầu trắng (đối xứng). Ta lập được bảng như sau.

Số mặt đen	0	1	2	3	4	5	6
Số mặt trắng	6	5	4	3	2	1	0
Số cách sơn	1	1	2	2	2	1	1

Tổng cộng có 10 cách (trong đó có 8 cách sử dụng đúng 2 màu).

Bài toán 16. *Có thể sơn các mặt của một hình lập phương bằng đúng* 6 *mầu sao cho mỗi mặt chỉ một mầu và hai mặt bất kì đều có màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sơn nếu hai vị trí khác nhau được nhận từ nhau bởi phép quay không tính là khác nhau?*

Lời giải: Có 30 cách.
Đầu tiên ta sơn một mặt bằng mầu đỏ và đặt hình lập phương trên mặt này (mặt bị che khuất). Như vậy còn 5 mặt. Mặt trên cùng có 5 cách. Bốn mặt còn lại có thể xoay tròn nên có $4\cdot 3\cdot 2\cdot \dfrac{1}{4}=6$ cách.
Tổng cộng sẽ có $5\cdot 6=30$ cách.

Bài toán 17. *Có bao nhiêu cách sơn các mặt của một hình lập phương bằng đúng* 5 *mầu sao cho mỗi mặt chỉ một mầu nếu hai vị trí khác nhau được nhận từ nhau bởi phép quay không tính là khác nhau.*

Lời giải: Có 75 cách.
Có đúng 2 mặt có cùng mầu. Các mầu còn lại mỗi mầu sơn một mặt. Như vậy có 5 cách chọn ra một mầu được sử dụng 2 lần.

+ Nếu 2 mặt cùng mầu là hai mặt đối diện, cố định 2 mặt này thì 4 mặt còn lại có $4!=24$ cách, nhưng các vị trí này có 4 cách có thể quay, vậy còn $(\dfrac{4!}{4})$ cách, nhưng hai mặt trên và dưới cũng có thể đổi chỗ cho nhau (quay quanh trục vuông góc với 2 mặt cùng mầu), do đó chỉ còn có $6:2=3$ cách.
+ Nếu hai mặt cùng màu có cạnh chung, thì 4 mặt còn lại có 24 cách, nhưng trong số này có các cặp là trùng nhau qua phép quay 180^0 quanh trục là đường thẳng đi qua trung điểm của cạnh chung và trung điểm cạnh đối diện với cạnh chung. Như vậy chỉ còn 12 cách.

Nhân tất cả với 5 cách chọn mầu cho hai mặt cùng mầu ta được $5\times(3+12)=5\cdot 15=75$.

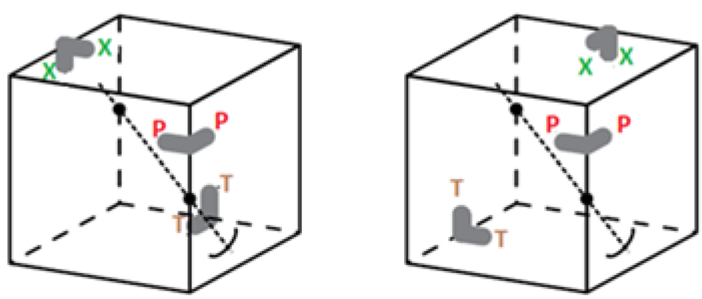
Bài toán 18. *Có bao nhiêu cách sơn các mặt của một hình lập phương bằng đúng 3 mầu sao cho mỗi mặt chỉ một mầu nếu hai vị trí khác nhau được nhận từ nhau bởi phép quay thì không tính là khác nhau.*

Lời giải: Có 30 cách.
Giả sử các màu là đỏ, trắng và xanh. Số lượng các mặt có cùng màu lần lượt là $(4, 1, 1)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$.

+ Ta xét trường hợp $(4, 1, 1)$: Có 3 cách chọn một màu để sơn cho 4 mặt cùng màu đó. Giả sử có 4 mặt màu đỏ. Vậy còn 1 mặt trắng và 1 mặt xanh, hai mặt này hoặc đối nhau hoặc cạnh nhau (có cạnh chung) vậy có $3 \times 2 = 6$ cách khác nhau.

+ Trường hợp $(3, 2, 1)$: Có $3 \times 2 = 6$ cách chọn mầu. Giả sử bây giờ có 3 đỏ, 2 trắng và 1 xanh. Ta sơn mặt dưới cùng màu xanh. Vị trí của 2 mặt màu trắng so với mặt mầu xanh có 3 khả năng khác nhau. Có thể là mặt trắng đối diện với mặt xanh, con mặt trắng thứ 2 chọn bất kì thì với phép quay vị trí tương đối là như nhau. Có thể là hai mặt trắng đối diện nhau hoặc 2 mặt trắng cạnh nhau nhưng không có mặt nào đối diện với mặt xanh. Các mặt còn lại là mầu đỏ. Như vậy có tất cả $6 \times 3 = 18$ cách.

+ Trường hợp cuối cùng khi cả 3 mầu đều có đúng 2 mặt. Cách chọn mầu không gây ảnh hưởng. Nếu có một mầu hai mặt của mầu này đối diện nhau còn hai mầu kia các mặt cạnh nhau thì có 3 khả năng vì có 3 cách chọn màu cho bộ đối diện. Nếu có thêm một cặp mặt cùng mầu đối diện nhau thì cặp mặt thứ 3 cũng đối diện nhau và như vậy do phép quay chỉ có một khả năng. Còn lại trường hợp không có cặp cùng mầu nào nằm đối diện nhau. Vậy cả ba mầu là các cặp mặt liền nhau (chung cạnh). Có 2 khả năng có thể (xem hình vẽ).
  Vậy có $3 + 1 + 2 = 6$ khả năng cho trường hợp này.



Tổng hợp cả 3 trường hợp ta có: $6 + 18 + 6 = 30$ khả năng.

Exercise 5.1. Có bao nhiêu cách sơn các mặt của một hình lập phương bằng đúng 4 mầu sao cho mỗi mặt chỉ một mầu. Nếu hai vị trí khác nhau được nhận từ nhau bởi phép quay không tính là khác nhau.

Đáp số: 68 cách.

Exercise 5.2. Có bao nhiêu cách sơn các mặt của một hình lập phương bằng n mầu sao cho mỗi mặt chỉ một mầu nếu hai vị trí khác nhau được nhận từ nhau bởi phép quay, đối xứng hay phép lật hình có chung mầu thì không tính là khác nhau. *Ghi chú:* Trong bài này số mầu được dùng là n nhưng không bắt buộc phải dùng hết.

Đáp số: $\frac{1}{24} \times (n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$.

Bài toán 19. *Có bao nhiêu cách sơn các mặt của hình lập phương bởi ba màu: Đỏ, xanh, vàng sao cho có hai mặt xanh, hai mặt đỏ, hai mặt nâu và các hình nhận được từ nhau bằng phép quay không tính là khác nhau?*

Lời giải: Có 6 cách.

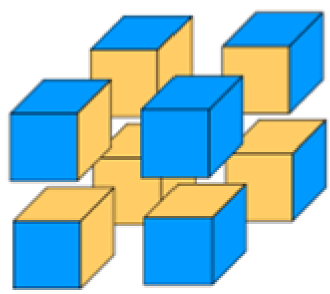
+ Khi 2 mặt đỏ đối diện nhau. Khi đó hoặc các mầu khác cũng đối diện nhau (1 cách) hoặc không đối diện nhau (1 cách). Như vậy có $1 + 1 = 2$.

+ Khi 2 mặt đỏ cạnh nhau (có cạnh chung). Xét 2 mặt đối diện nhau và có chung đỉnh với 2 đỉnh có cạnh chung của 2 mặt đỏ. Nếu các mặt này đồng mầu (2 cách) hoặc khác màu (2 cách). Do đó có $2 + 2 = 4$.

Tổng cộng $2 + 4 = 6$ cách.

Exercise 5.3. Có thể sơn 8 quân xúc xắc bằng hai màu sao cho bất kì từ mẫu nào ta cũng có thể ghép hình lập phương có màu theo yêu cầu hay không?

Lời giải: Có thể.



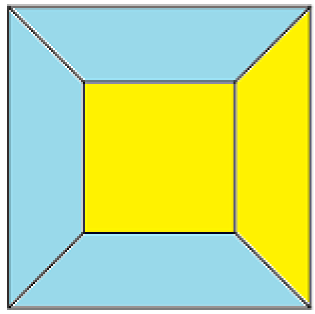
Bài toán 20.

a) Nếu các mặt của 27 khối lập phương con được sơn bất kì bằng hai màu. Hỏi có thể ghép thành một hình lập phương lớn $3 \times 3 \times 3$ có bề mặt cùng một mầu hay không?

b) Nếu điều kiện bắt buộc là trên một hình lập phương con số mặt mầu này phải bằng số mặt của màu kia thì mục đích ghép một hình lập phương có bề mặt cùng một mầu có thực hiện được không?

Lời giải: a) Không thể.
Sơn 13 hình lập phương mầu đỏ, 14 hình mầu xanh. Trên bề mặt của hình lập phương $3 \times 3 \times 3$ cả hai nhóm đều có mặt.
b) Không thể.

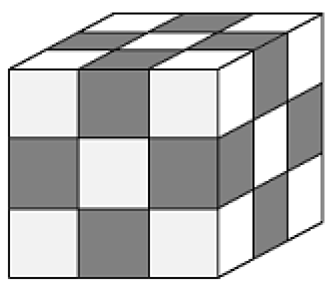
Trong trường hợp này người ta có thể sơn các hình lập phương con theo hình đi kèm (mặt không nhìn thấy có màu vàng).



Bất kì đỉnh nào của lập phương con đều không có cùng một màu bao quanh. Do đó không thể tạo được lập phương $3 \times 3 \times 3$ cho bề ngoài một mầu (chú ý các đỉnh là đỉnh của lập phương lớn).

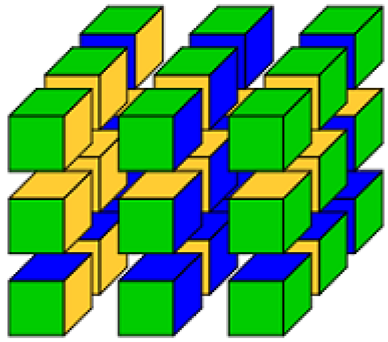
Exercise 5.4. Có 27 khối lập phương màu trắng. Có thể sơn các mặt của các hình bằng mầu đỏ sao cho không thể xếp được hình lập phương có bên ngoài màu đỏ. Hỏi số mặt nhiều nhất có thể sơn là bao nhiêu?

Exercise 5.5. Có khối lập phương $3 \times 3 \times 3$. Đỉnh A là quân lập phương con được sơn màu đỏ (tất cả còn lại là màu trắng). Bạch Tuyết muốn di chuyển quân mầu đỏ sang vị trí đối diện trên hình lập phương lớn. Quy tắc đi là có thể đổi vị trí lớp nào đó đang chứa quân màu đỏ cho lớp nằm bên cạnh, và Phù Thủy chỉ cho phép thực hiện công việc bằng đúng một số bước nhất định cho trước (từ 5 đến 10 bước). Hỏi ai có thể đạt mục đích của mình?



Bài toán 21. *Cần sơn 27 khối lập phương nhỏ bằng 3 mầu sao cho có thể ghép được thành 3 khối lập phương $3 \times 3 \times 3$ có ba mầu khác nhau?*

Lời giải:
Gọi ba màu đó là xanh đậm (B), vàng (Y) và xanh nõn chuối (G). Như vậy để tô mầu B bề ngoài của khối lập phương lớn cần $6 \times 9 = 54$ mặt vuông con có mầu B. Tương tự cho hai màu kia cũng vậy. Như thế tối thiểu cho 3 màu sơn ta cần $54 \times 3 = 162$ mặt hình vuông nhỏ. Số 162 này cũng chính bằng số mặt hình vuông nhỏ có từ 27 khối lập phương nhỏ ($27 \times 3 = 162$). Như vậy về nguyên tắc có thể có cách tô nếu chỉ xét về số lượng các mặt hình vuông nhỏ.
Ta xét các mặt màu B (blue). Cần 8 khối lập phương nhỏ ở 8 đỉnh có 3 mặt được sơn mầu B; 12 khối nằm theo cạnh có 2 mặt B và 6 khối nằm ở giữa có một mặt B. Ký hiệu các cấu hình này là B_3, B_2, B_1. Đối với hai màu kia cũng vậy với ký hiệu tương ứng Y (yellow) và G (green). Sau đây là một lời giải tuyệt đẹp minh họa được bằng hình vẽ.

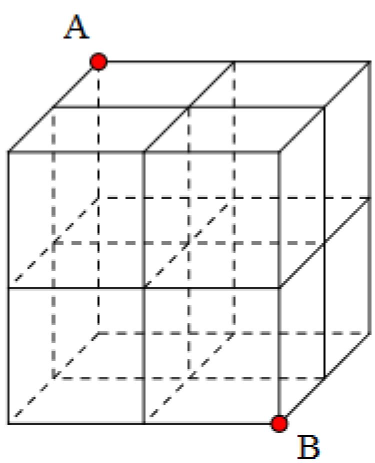


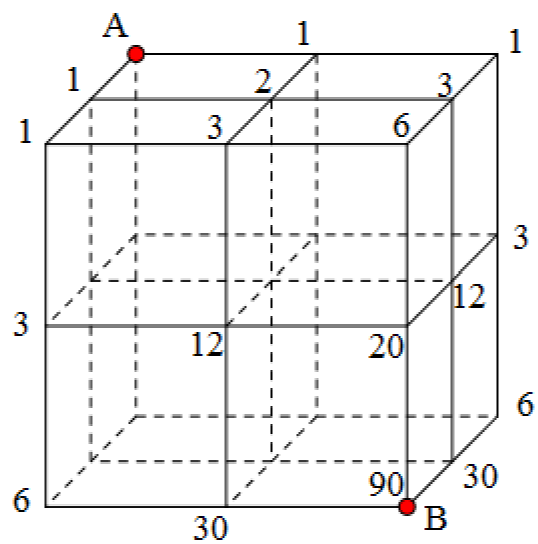
Tập trung các loại cấu hình ta có 8 bộ $G_3,\ Y_3,\ B_3$; 12 bộ $G_2,\ Y_2,\ B_2$ và 6 bộ $G_1,\ Y_1,\ B_1$. Các cấu hình này được xắp xếp như sau:
6 khối $(G_2,\ Y_2,\ B_2)$; 6 khối $(G_3,\ Y_2,\ B_1)$; 6 khối $(Y_3,\ B_2,\ G_1)$; 6 khối $(B_3,\ G_2,\ Y_1)$;
1 khối $(G_3,\ Y_3)$; 1 khối $(Y_3,\ B_3)$; 1 khối $(B_3,\ G_3)$;
Với các cấu hình này ta chỉ việc "khéo" ghép để thành những hình khối bề ngoài đồng màu theo yêu cầu bài toán, phần này dành cho bạn đọc.

6 Hành trình trong khối lập phương

Bài toán 22. *Trên lưới lập phương với nút $3 \times 3 \times 3$. Có bao nhiều cách đi ngắn nhất từ một đỉnh này sang đỉnh đối diện?*

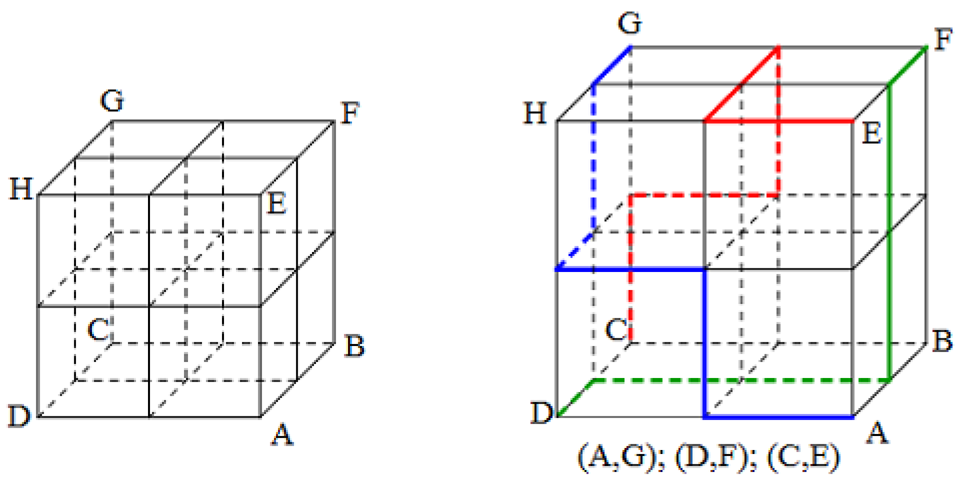
Lời giải: Có tổng cộng 90 cách.
Bài toán tổ hợp đếm được minh họa trong hình vẽ:



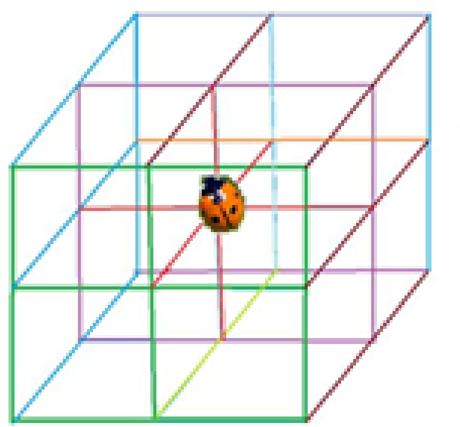


Bài toán 23. *Xét lưới lập phương có các đỉnh lập thành nút $3 \times 3 \times 3$. Kí hiệu các đỉnh là $ABCD$ và $EFGH$ trong đó (A, E), (B, F), (C, G) và (D, H) là các cặp đỉnh đối nhau. Hãy chỉ ra rằng có thể nối các cạnh của lưới lập phương sao cho 3 cặp đỉnh đối nhau có đường riêng biệt dẫn đến nhau mà không đường nào có đỉnh chung, nhưng không tồn tại cách nối như vậy cho 4 cặp đỉnh.*

Gợi ý: Xem hình vẽ.



Exercise 6.1. Cánh cam làm toán mãi, nên muốn đi dạo quanh biết thự thủy tinh của mình. Lối đi là các đoạn thẳng nối các nút. Trước khi đi cánh cam muốn vẽ một sơ đồ đi dạo sao cho mỗi nút chỉ phải qua một lần.
Liệu cánh cam có làm được không? Hãy giúp cánh cam nhé các bạn!



7 Một số bài toán khác

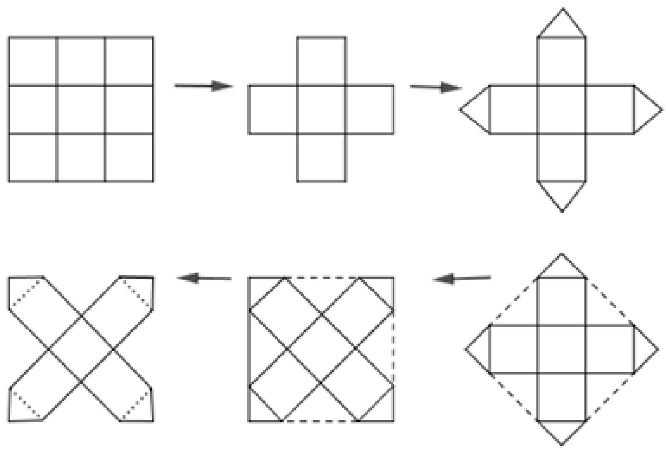
Exercise 7.1. An và Bình cùng chơi trò chơi tung xúc xắc. Trên bề mặt của quân xúc xắc của An có ghi các số $4, 6, 10, 18, 20, 22$, của Bình có ghi các số $3, 9, 13, 15, 17, 25$. Hai người cùng tung xúc xắc của mình, số của ai lớn hơn người đó thắng. Ai có xác suất chiến thăng cao hơn?

Exercise 7.2. An và Bình chơi trò tung xúc xắc. Trên xúc xắc của mỗi người đều có ghi các số nguyên dương. Cả hai người cùng tung xúc xắc, số của ai lớn hơn thì người đó thắng cuộc. Nếu trung bình cộng các số của An lớn hơn trung bình cộng các số của Bình thì khả năng chiến thắng của An lớn hơn của Bình hay không?

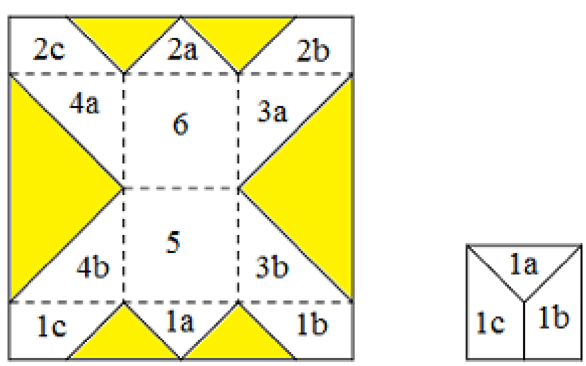
Exercise 7.3. An và Bình tham gia một trò chơi tung xúc xắc. Trên bàn có ba quân xúc xắc chưa ghi gì. An được quyền ghi các số từ 1 đến 18 lên các mặt của ba con xúc xắc mỗi số một mặt theo ý thích của mình. Bình được chọn một con xúc xắc đã ghi số, sau đó trong hai xúc xắc còn lại, An được chọn một con. Một con bị loại. Và được chơi như các bài trên, ai tung được số lớn thì người đó thắng. Hỏi ai có xác xuất lớn hơn để thắng trận?

Bài toán 24. *Hãy cắt từ lưới ô vuông 3×3 một hình liền mảnh là khung của khối lập phương kích thước $1 \times 1 \times 1$ sao cho các nhát cắt hoặc song song hoặc vuông góc với nhau.*

Lời giải:
Cách cắt thứ nhất: Quá trình cắt được trình bày qua loạt các hình vẽ minh họa dưới đây. Trong hàng trên chúng ta như sử dụng lưới 3×3 nhưng thực sự không phải vậy. Từ bước thứ 3 ta xoay hình 45^0. Và thực chất ta xuất phát từ một hình vuông kích thước nhỏ hơn chỉ cần $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ ($< 3 \times 3$) để cắt khung của hình lập phương.



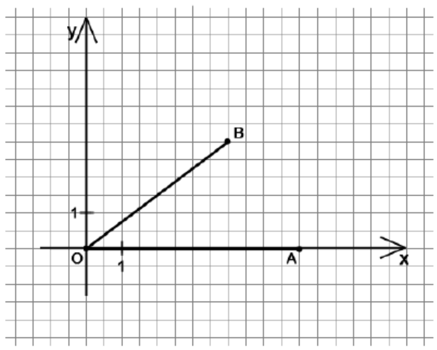
Cách cắt thứ 2: Ta giữ tiêu chuẩn các nếp gấp dọc theo đường lưới. Cùng xuất phát từ các nhát kéo 45^0, nhưng để các nếp gấp song song với khung lưới (trong hình là những đường gạch gạch) ta được khối hình hộp có độ dài là 1 đơn vị. Với cách cắt này cần hình vuông kích thước 3×3.



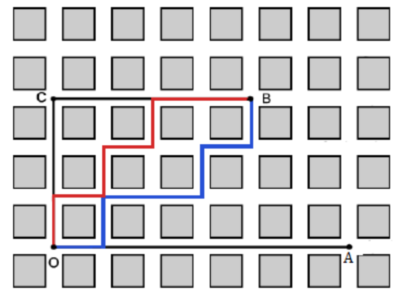
Phần II

Hình Học Taxi

8 Khái niệm khoảng cách



Hình học " MẮT"



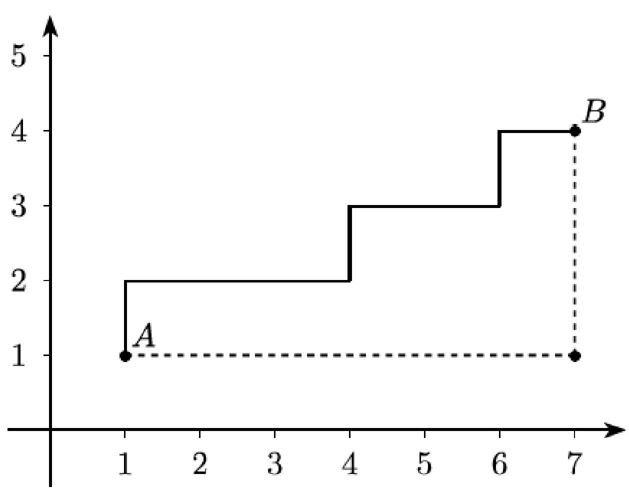
Hình học "CHÂN"

Hình học “mắt” chính là hình học Euclid mà chúng ta thường dùng hàng ngày để định vị. Trong giao thông đòi hỏi “đến được nơi ấy” mang một tầm quan trọng khác và chúng ta phải dùng đến hình học “chân”. Hình học mắt có tính tổng thể bao nhiêu thì hình học “chân” lại mang nhiều mầu sắc cá thể bấy nhiêu.

Định nghĩa 1. Trong hệ tọa độ vuông góc khoảng cách của hai điểm là độ dài nhỏ nhất của những đường gấp khúc - mà các khúc là các đoạn thẳng song song với một trục tọa độ nào đó - nối hai điểm đó với nhau.

Định nghĩa 2 (Công thức)**.** Trong hệ tọa độ vuông góc khoảng cách của hai điểm $P(p_x, p_y)$; $Q(q_x, q_y)$ là: $d := |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$.

Bài toán 25. Hai định nghĩa là tương đương.



Bài toán 26. $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0$ (tập số không âm) là một hàm độ đo.

i) $d(a, b) = 0$ khi và chỉ khi $a = b$.

ii) $d(a, b) = d(b, a)$.

iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (BĐT tam giác).

Ghi chú: Hợp của hai đường gấp khúc cũng là đường gấp khúc do đó theo định nghĩa 1.1 ta có ngay $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Khái niệm độ đo này được gọi là độ đo taxi, nhiều nơi người ta còn gọi là khoảng cách Manhattan − vì hệ thống giao thông của thành phố này là môi trường lý tưởng để ứng dụng loại hình học này. Trong trường học hình học này giữa các bạn học sinh còn phổ dụng cái tên hình học con Cờ Hó.

Bài toán 27. Khoảng cách Euclid luôn nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách Taxi.

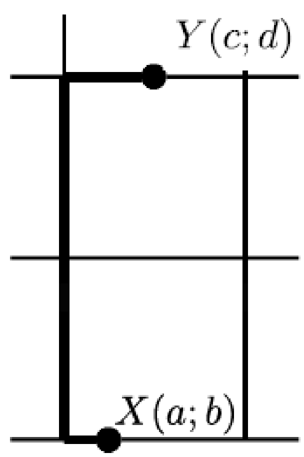
Hướng dẫn. $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

9 Lịch sử hình học taxi.

Cuối thế kỉ XIX đầu XX nhà toán học gốc Đức Herman Minkovski (1864 − 1909) đã đưa ra và khảo sát một loạt các độ đo khác nhau, trong đó có độ đo taxi có nhiều ứng dụng trong giao thông. Cái tên Hình học taxi được xuất hiện lần đầu tiên bởi Karl Menger năm 1928 trong một cuộc triển lãm mang tên “Bạn sẽ yêu thích hình học” của Viện bảo tàng khoa học tự nhiên Chicago tổ chức. Năm 1975 nhận thấy tầm quan trọng ứng dụng của hình học taxi Eugene Krause đã xuất bản cuốn sách Taxicab Geometry tạo tiền đề cơ bản cho việc nghiên cứu và phát triển nhánh hình học ứng dụng này.

Ngày nay trong quá trình sử dụng người ta đã tinh vi hóa khoảng cách Manhattan.

Nếu hệ thống đường giao thông vẫn là các đường phố tạo thành lưới ô vuông, nhưng các điểm không nhất thiết nằm tại các ngã tư, thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm trong thành phố được điều chỉnh lại.



Ví dụ: Các ô vuông của lưới vẫn giữ khoảng cách đơn vị. Hai điểm X và Y (ở đây hai điểm nằm trong cùng một cột) có khoảng cách là:

$$d(X, Y) = |d - b| + min(\{a\} + \{c\}, 2 - \{a\} - \{c\}).$$

Trong bài báo này chúng ta sử dụng các khái niệm khoảng cách theo độ đo Taxi như phần đầu đã định nghĩa. Tập hợp các điểm được xét đến là tập các điểm nút giao của các đường lưới

ô vuông.
Trong hình học taxi khái niệm **thẳng** chỉ còn mang ý nghĩa **ngắn nhất**. Giữa hai điểm có nhiều đường gấp khúc có độ dài ngắn nhỏ nhất (và vì thế bằng nhau) nối hai điểm. Khái niệm **đường tròn** sẽ được hiểu là **cách đều một điểm**. Vì tính duy nhất cửa sự thẳng đã không tồn tại nên các khái niệm thẳng hàng và đồng quy mang ý nghĩa khác.
Môi trường Hình học taxi là một môi trường có độ đo, có nghĩa là trả lời được đúng sai, do đó làm được toán. Nhưng môi trường này không phải là không gian vector hay tô pô Hausdoff , hoặc tô pô Borel dó đo rất cản trở cho quá trình xây dựng lý thuyết về giải tích.
Môi trường áp dụng của hình học taxi gần thân thuộc với toán rời rạc hơn và vì thế các nghiên cứu dưới quan điểm toán rời rạc có nhiều kết quả tích cực khả quan.
Một số các kết quả đẹp liên quan đến môi trường hình học taxi: Trước hết phải kể đến hình học lưới ô vuông mà đỉnh điểm là định lý Pick:

Định lý 1 (Định lí Pick)**.** *Cho P là một đa giác đơn có các đỉnh là các điểm nguyên, I là số điểm nguyên nằm trong và B là số điểm nguyên nằm trên biên của P. Khi đó ta có đẳng thức:*

$$S_P = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

Trong đó S_P là diện tích của đa giác P.

Bài toán 28. Trong lưới ô vuông số đường đi ngắn nhất từ điểm A đến điểm B là hai đỉnh của một hình chữ nhật kích thước $a \times b$ là: $\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$.

10 Đường thẳng và đường tròn

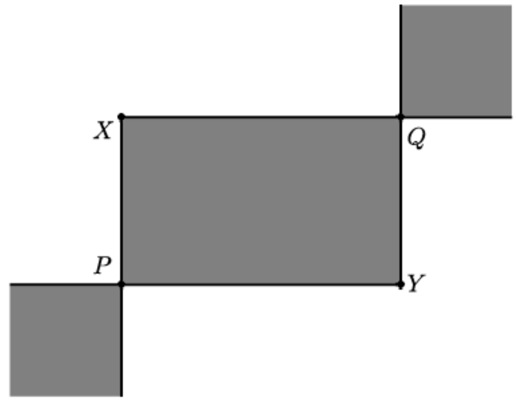
Trong hình học Euclid người ta định nghĩa đường tròn là tập hợp của những điểm trên mặt phẳng cách đều một điểm cho trước một khoảng cho trước. Định nghĩa này cũng hoàn toàn sử dụng được trong hình học taxi.
Hình tròn đơn vị trong hình học taxi về hình ảnh là hình vuông đơn vị với các đỉnh là $(0,1)$; $(1,0)$; $(0,-1)$ và $(-1,0)$ vì nó thỏa mãn phương trình $|x| + |y| = 1$ cũng chính là công thức khoảng cách trong hình học taxi. Tương tự như vậy.

Định nghĩa 3. Đường tròn tâm $P(p_x, p_y)$ với bán kính taxi r là hình vuông có các đỉnh là $(p_x + r, p_y)$; $(p_x, p_y + r)$; $(p_x - r, p_y)$; $(p_x, p_y - r)$.

Định nghĩa 4. Ba điểm x_1, x_2, x_3 được gọi là nằm trên một "đường" thẳng nếu tồn tại một hoán vị $\pi \in S_3$ sao cho $d(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}) + d(x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}) = d(x_{\pi(3)}, x_{\pi(1)})$, hay nói cách khác tồn tại một hoán vị của ba điểm để bất đẳng thức tam giác thành đẳng thức.

Bài toán 29. Đường thẳng là hàm đồng biến.

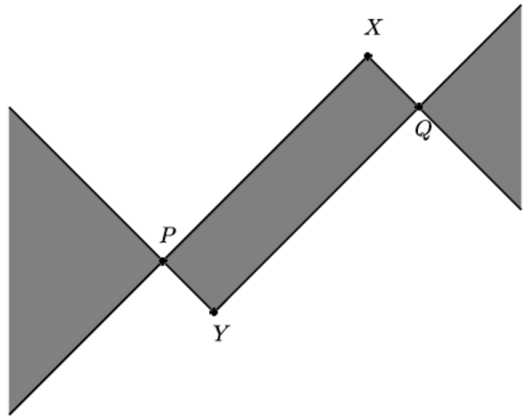
Lời giải: Trong hình vẽ dưới đây các miền được tô màu xám là nơi có các điểm thẳng hàng với hai điểm P và Q cho trước.



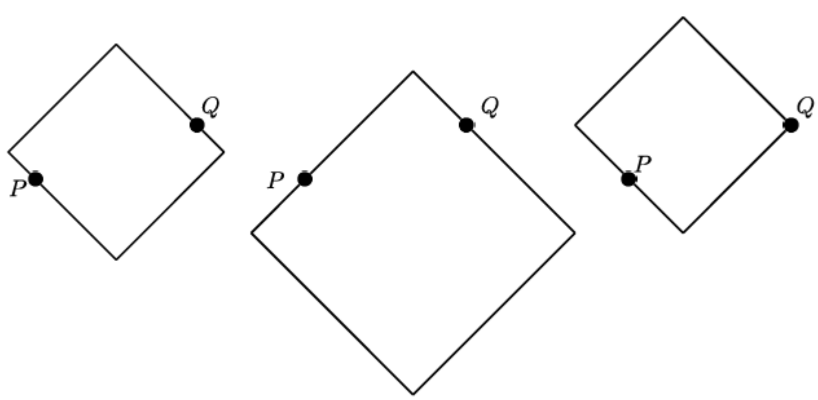
Trên hình ta có PX và QY song song với trục y; PY và QX song song với trục x.

Bài toán 30. Trong hình học taxi không phải qua 3 điểm bất kì ta đều có thể kẻ đường thẳng hay vẽ được đường tròn.

Trong hình tiếp theo phần mặt phẳng được tô xám là nơi có các điểm không nằm trên một đường tròn cùng hai điểm cho trước P và Q.



Ở đây XP và YQ song song vời đương thẳng $y = x$ còn YP và XQ song song với đường thẳng $y = -x$.
Ta hãy kẻ các đường thẳng có dạng song song với $y = x$ và $y = -x$ đi qua P. Giả sử rằng điểm Q nằm trong một phần tư mặt phẳng phía bên phải và $p_y < q_y$ (7 trường hợp khác làm tương tự). Như vậy các đường tròn có thể xê dịch theo 3 cách để có thể đi qua P và Q theo cách dưới đây:

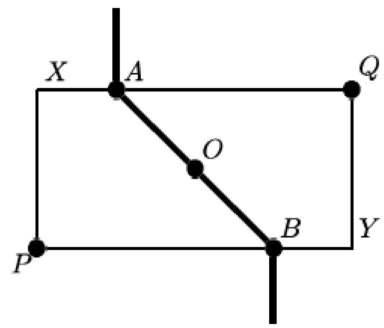


Thay đổi độ lớn của các hình vuông – đường tròn taxi (trong trường hợp 1 cả vị trí cũng

có thể thay đổi) ta nhận thấy rằng ngoài những vùng bị tô màu xám trong hình 4 thì qua tất cả các điểm khác và hai điểm P, Q ta đều vẽ được một đường tròn taxi.
Tổng kết: Phần được tô xám của hình 3 và hình 4 không phủ nhau hoàn toàn, có phần trùm (giao) nhau nhưng mỗi phần đều có điểm riêng. Điều nay nói lên rằng có thể có đường thẳng và đường tròn qua 3 điểm và có thể có nhiều đường tròn đi qua 3 điểm cho trước.
Trong hình học Euclid đường trung trực của hai điểm (đoạn thẳng là tập hợp những điểm cách đều hai điểm đã cho. Hình thức của khái niệm này biến đổi thế nào trong hình học taxi.

Bài toán 31. Hãy xác định tập các điểm cách đều hai điểm cho trước.

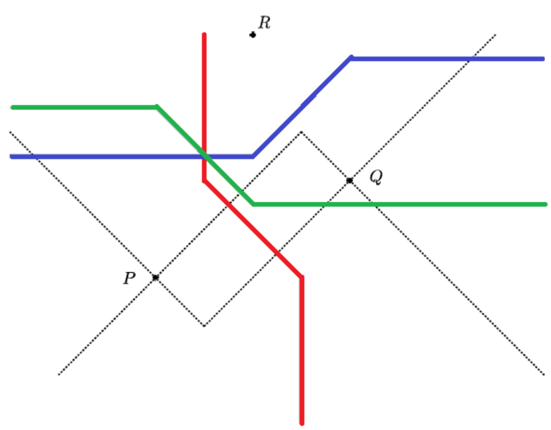
Lời giải: Ta lại giả thiết hai điểm P và Q nằm trên mặt phẳng như trong hình vẽ 5 của bài toán trên.



Qua trọng tâm O của hình chữ nhật $PXQY$ ta vẽ đoạn thẳng $y = -x$ đến chu vi (biên) của hình chữ nhật (tại điểm A và B). Đoạn thẳng AB và các tia xuất phát từ A và từ B song song với trục y ra phía ngoài hình chữ nhật chính là đường "trung trực" của hai điểm A và B. Cách xác định đường này có thể kiểm tra bằng phương pháp hình học không cần tính toán nhiều.

Bài toán 32. Xác định tâm đường tròn (nếu tồn tại) đi qua ba điểm cho trước.

Lời giải:



Như chúng ta đã thấy không phải lúc nào cũng tồn tại đường tròn đi qua bộ ba điểm cho trước. Trên hình vẽ nếu trọn vị trí điểm R thích hợp (đường chấm chấm giúp chúng ta trong việc này) khi đó ba đường "trung trực" đỏ, xanh đậm, xanh nõn chuối sẽ đồng quy tại một điểm bởi vì nếu tồn tại đường tròn ngoại tiếp thì tâm đường tròn chính là điểm thuộc cả ba đường trung trực.
Ghi chú: Trong các trường hợp đặc biệt có nhiều hơn 1 đường tròn ngoại tiếp ba điểm cho trước.

11 Bài toán UFO

Bài toán: Một UFO (vô hình) hạ xuống thành phố taxi (mạng lưới ô vuông). Nó tiếp tục chuyển động mỗi giây được 1 đơn vị taxi (từ điểm nguyên này sang điểm nguyên khác) theo một hướng cố định (Đ, T, N, B). Nhiệm vụ là phải dùng máy định vị chạm được vào UFO để nó hiện nguyên hình. Mỗi giây máy định vị có thể kiểm tra được một điểm tùy ý trên mặt phẳng. Hỏi trong thời gian hữu hạn có thể tìm được UFO hay không?

Bổ đề 1. UFO chuyển động trên tập các số tự nhiên từ một điểm bất kì. Mỗi bước đi được 1 đơn vị. Hãy tìm thuật toán để tìm được UFO.

Lời giải: Nếu cả UFO và máy định vị ở cùng điểm 0, thì hiển nhiên xác định được ngay. Nếu sau n thời gian kể từ lúc xuất phát ta xác định được vị trí xuất phát của UFO ví dụ tại điểm k, thì tại điểm $k+n$ ta sẽ tìm thấy UFO. Vậy bài toán tương đương với việc tìm điểm xuất phát của UFO. Ta lần lượt giả thiết điểm khởi đầu của UFO là $1, 2, 3, \ldots$. Ta lập bảng:

Bước đi thứ	Điểm xuất phát (!)	Điểm kiểm tra
1	1	2
2	2	$2+2=4$
$\ldots.$	....	
n	$k(=n)$	$n+k=n+n$

Nếu điểm xuất phát giả thiết trùng với điểm xuất phát thực tế thì tại điểm kiểm tra sẽ tìm được UFO.

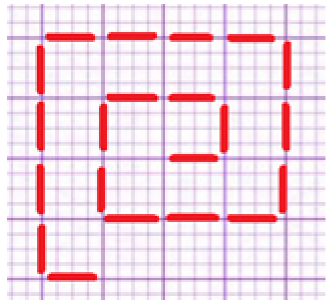
Bổ đề 2. UFO chuyển động theo một hướng cố định trên tập các số nguyên từ một điểm bất kì. Mỗi bước đi được 1 đơn vị. Hãy tìm thuật toán để tìm được UFO.

Lời giải: Trong bài này cách suy luận vẫn tương tự như bài trước nếu đã xác định được điểm xuất phát thì chỉ cần 2 lần kiểm tra (bên trái hay bên phải) là tìm được UFO. Vấn đề vẫn là đưa ra thuật toán để giả định tất cả các điểm trên mặt phẳng là điểm xuất phát có thể. Một ví dụ lần lượt chọn điểm xuất phát giả định $\{\pm 1, \pm 2, \ldots.\}$. Ta lại tiếp tục lập bảng:

Bước đi thứ	Điểm xuất phát	Điểm kiểm tra
1	1	$1+1$ và $1-2$
3	-1	$-1+3$ và $-1-4$
5	2	$2+5$ và $2-6$
7	-2	$-2+7$ và $-2-8$
$\ldots.$		
$4n+1$	n	$n+(4n+1)$ và $n-(4n+2)$
$4n+3$	$-n$	$-n+(4n+3)$ và $-n-(4n+4)$

Bổ đề 3. UFO chuyển động theo hướng BẮC (hướng cụ thể) trên mặt phẳng taxi từ một điểm nguyên bất kì. Mỗi bước đi được 1 đơn vị. Hãy tìm thuật toán để tìm được UFO.

Lời giải: Mở rộng cách xây dựng thuật toán đang thực hiện trong hai bài trước. Trong bài này chúng ta cần chỉ ra phương án đi qua tất cả các điểm nguyên trên mặt phẳng (giả định điểm xuất phát của UFO và tại mọi điểm xây dựng phương án kiểm tra tìm kiếm.
Có nhiều phương án đi lần lượt các điểm nguyên của mặt phẳng. Ví dụ:

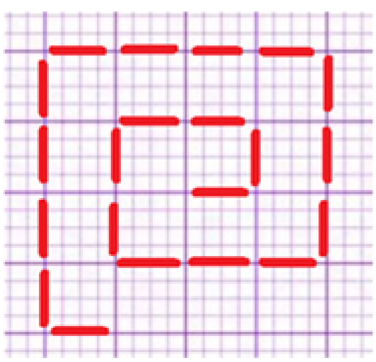


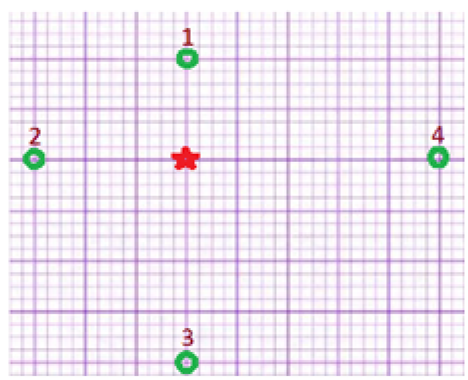
Bước đi thứ	Điểm xuất phát	Điểm kiểm tra
1	$(1,0)$	$(1,1)$
2	$(1,1)$	$(1,1+2)$
3	$(0,1)$	$(0,1+3)$
4	$(-1,1)$	$(-1,1+4)$
5	$(-1,0)$	$(-1,0+5)$
6	$(-1,-1)$	$(-1,-1+6)$
....		

Quay về bài toán chính.
Chúng ta chỉ cần giải quyết hai thuật toán:

1. Thuật toán đánh dấu lần lượt các điểm nguyên của mặt phẳng: Sau khi đã rõ mục đích thì có rất nhiều cách chọn các thuật toán này.

2. Thuật toán kiểm tra tại mỗi điểm giả định theo hàm thời gian đã trôi qua.





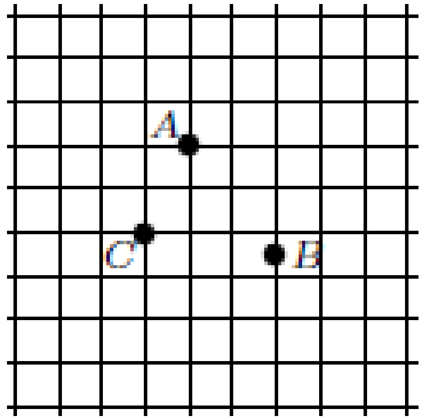
Giả sử điểm giả định xuất phát là (i,j) tại thời điểm n. Khi đó điểm kiểm tra lần lượt sẽ là: $(i,j+n)$, $(i-n-1,j)$, $(i,j-n-3)$, $(i+n+2,j)$.

Với thuật toán này ta sẽ tìm được UFO trong thời gian hữu hạn.

12 Bài tập luyện tập

1. Trong hình là bản đồ của một thành phố trong thế giới của các con Cờ hó.
i) Xác định khoảng cách AB, BC, CA.

Sơn bằng các màu khác nhau các điểm cách A khoảng cách là:

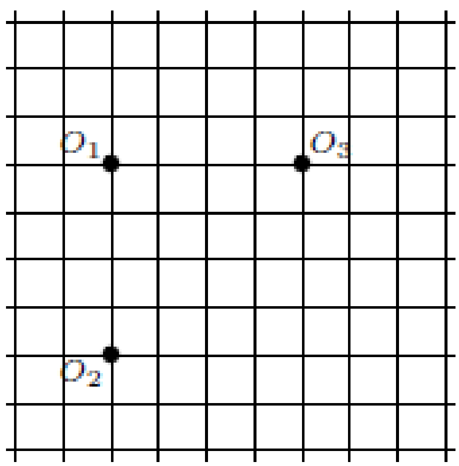


a) 100 b) 150 c) 200 d) 250 e) 300

ii) Sơn bằng các màu khác nhau và là các vòng tròn rỗng nhỏ các điểm cách B khoảng cách là:

f) 100 g) 150 h) 200 i) 250 j) 300

2. Trên bản đồ siêu thành phố Taxi kí hiệu k_1, k_2 và k_3 là những vòng tròn tâm O_1, O_2 O_3 và bán kính lần lượt là $r_1 = 100, r_2 = 300, r_3 = 500$ (độ dài của một cạnh ô vuông là 100 đơn vị). Hỏi các đường tròn đôi một có bao nhiêu điểm chung?



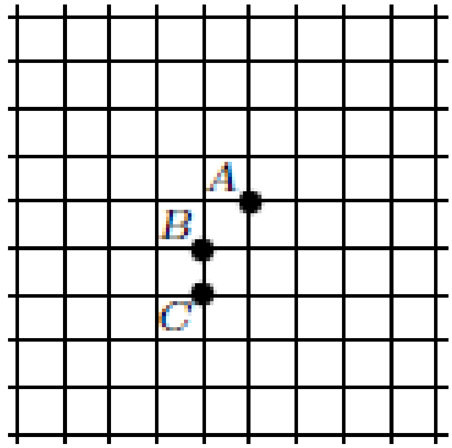
3. Các điểm A, B và C như trong hình vẽ dưới đây. Xác định các vị trí cách đều các điểm:

a) A và B;

b) B và C;

c) C và A;

d) Có bao nhiêu điểm cách đều cả ba điểm A, B và C?



4. Cho trước ba điểm. Hãy xác định tập các điểm cách đều 3 điểm đã cho. Có hay không bộ ba điểm sao cho tập các điểm cách đều chúng có số phần tử là:

a) 1;   b) vô cùng;   c) 2.

5. CM bất đẳng thức tam giác trong hình học taxi.

6. Hai đường tròn trong hình học taxi có thể có 13 điểm chung hay không?

7. Trong thành phố lý tưởng (hệ thống giao thông là lưới ô vuông). Tại điểm $X(-1,4)$ xảy ra tai nạn giao thông. Hai xe cảnh sát giao thông đang có ở gần hiện trường, một xe tại điểm $A(2,1)$ và xe kia ở điểm $B(-1,-1)$. Phải điều xe nào để đến hiện trường nhanh nhất?

8. An và Bình cùng tìm nhà trọ trong thành phố lý tưởng. A làm việc tại một nhà bank vị trí tại điểm $A(-3,-1)$, Bình làm việc tại một trường học $B(3,3)$. Họ quyết định tìm nhà tại những địa điểm mà tổng quãng đường đi của hai người là ngắn nhất. Hãy xác định các địa điểm đó.

9. Emy đang đi trong thành phố lý tưởng tại điểm $E(2,1)$ thì thấy xe của mình xắp hết xăng. Biết rằng tại khoảng cách 5 dãy nhà quanh đó có cây xăng. Hãy xác định vị trí có thể của cây xăng?

10. Phạm làm việc trong thành phố lý tưởng tại địa điểm $P(1,2)$. Anh ta không muốn ăn trưa ở nơi xa chỗ làm việc quá 3 khu nhà. Hãy xác định cho Phạm vị trí có thể ăn trưa theo yêu cầu của anh ta.

11. Một nhà kiến trúc muốn xây một nhà nghỉ. Quanh khu vực đó có một siêu thị ở điểm $B(-2,1)$ và một sân thể thao ở điểm $T(2,2)$. Ông ta muốn tìm một địa điểm cách siêu thị không quá 5 tòa nhà và cách sân tennis không quá 4 nhà. Hãy xác định các vị trí đáp ứng được yêu cầu của nhà kiến trúc.

12. Công ty trang trí có kế hoạch đặt các đèn mầu trong một khu phố lý tưởng sao cho tất cả những chung cư cách trung tâm thành phố 12 tòa nhà đều có thể tìm thấy một đèn mầu không cách xa mình quá 4 tòa nhà. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu điểm đặt đèn mầu?

13. Chính và Đáng cùng tìm nhà ở. Họ thống nhất với nhau chọn nơi mà khoảng cách từ đó đến nơi làm việc của hai người bằng nhau. Chỗ làm việc của Chính là ở $C(-3,-1)$ và của Đáng là ở $D(3,3)$. Hãy tìm cho họ các nơi ở đáp ứng yêu cầu của họ.

14. Trong quận lý tưởng có ba trường học tại các vị trí Quang Trung ở điểm $Q(-4,3)$, Nguyễn Huệ ở điểm $H(2,1)$ và Xuân Hương ở điểm $X(-1,-6)$. Hỏi học sinh quận này đi học thế nào tại là gần nhất $-$ tức là phải phân tuyến cho học sinh như thế nào cho hợp lý?

Phần III

Cubes and related problems

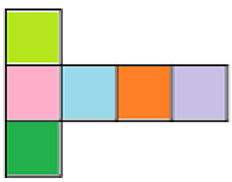
Matematical problems around cubes are very old but remain interesting to this day. They pose exciting challenges to learners and educators alike. These problems set apart good students from the average. In this document, I try to summarize and categorize characteristic problems revolving around cubes. Reference material can be found at [1], [2], [3], [4], [5].
A number of problems were collected from Hungarian mathematics camps.

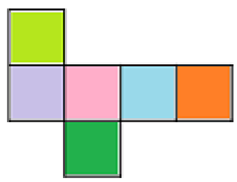
13 Spread the cube on the plane

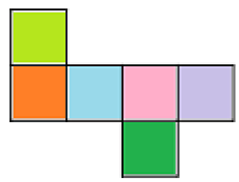
13.1. We will show that 11 flat nets can be drawn for a cube. Cases that can be rotated to overlap are not counted as different.

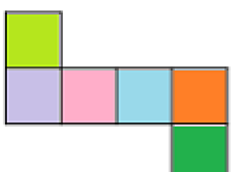
We can list the separate nets.

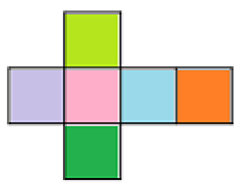
a) There are four squares in a line. Because if there were 5 squares in one line, it could not be folded into a cube as two faces would overlap. This case provides six different nets from 1 to 6.

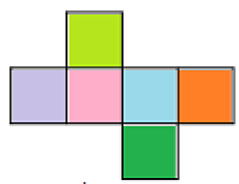

1)


2)

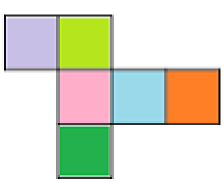

3)

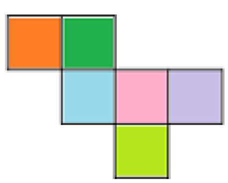

4)

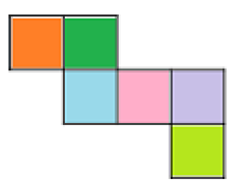

5)

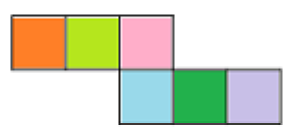

6)

b) There are exactly 3 squares in a row. We get the 3−line nets $(2, 3, 1)$ of the squares in Fig. 7, 8, 9 and a 2−line $(3, 3)$ net in Figure 10.

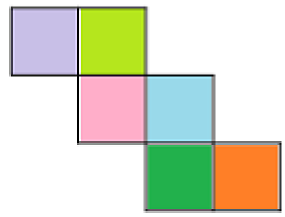

7)


8)


9)


10)

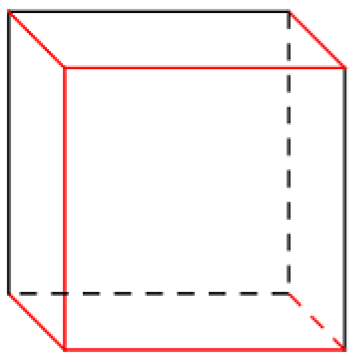
c) Finally, there is a 3−line (2, 2, 2) square as shown in Figure 11.

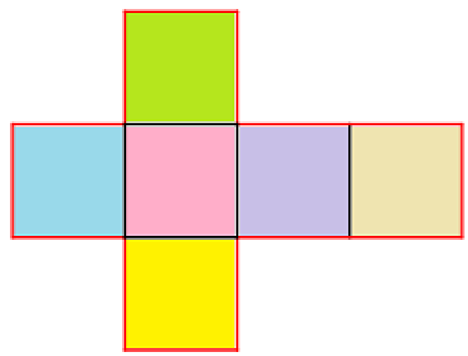


11)

he above net we can fold to get the cube.

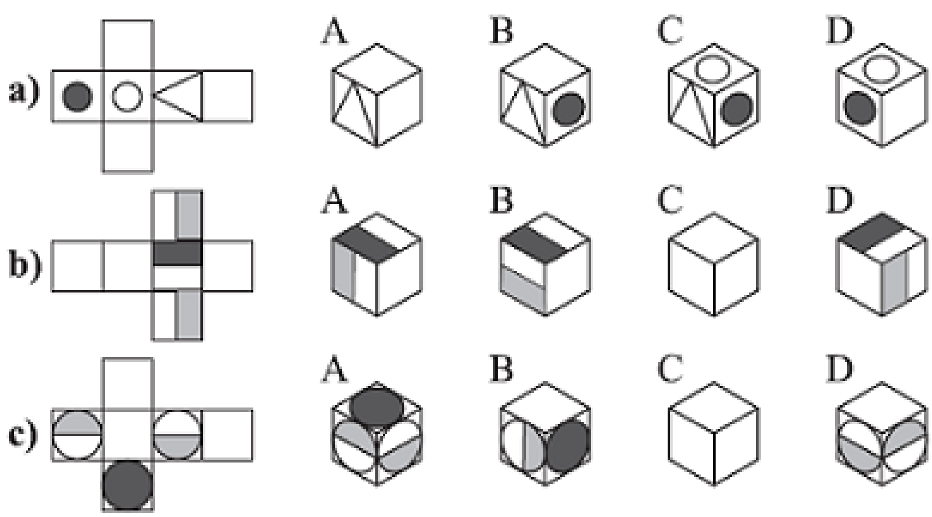
13.2 Cut a cube along the edges to get the cube net.
Guide: On the picture.



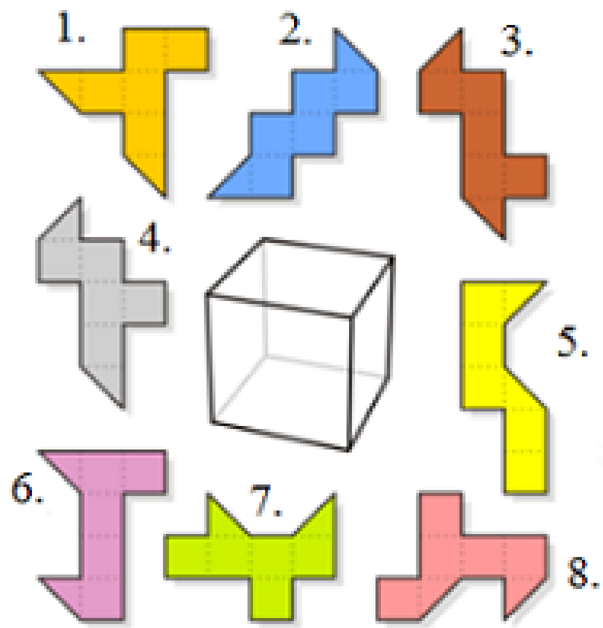


Exercise 13.1. Cut the cube along the corresponding edges to get the cubes from 1 to 11.

Exercise 13.2. Of A, B, C, D which cube matches the net showed on the left?



Exercise 13.3. On the picture, each net is made of 5 squares and 2 triangles. Which nets can be folded into a cube?



Exercise 13.4. You have a square paper. Have should you cut one piece from it so that it can be folded into a cube of the largest volume?

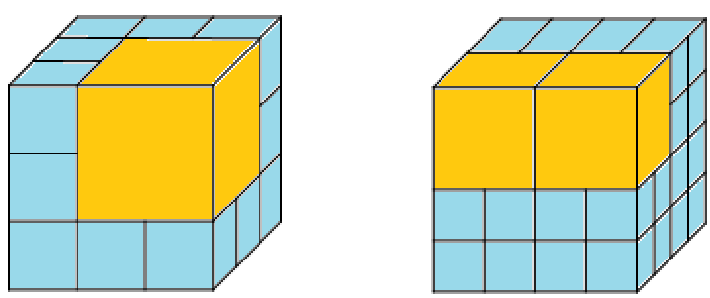
You can find more exercises in Reference [3], [4].

14 Cubes

Problem 14.1. Can you cut a cube into 20 cubes? Can you cut it into 50 cubes?

Solution: Possible for both cases.

With the dimensions $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, and $4 \times 4 \times 4$, we can create 8, 27, and 64 cubes. In reverse, it is $64 \to 1,\ 27 \to 1,\ 8 \to 1$.



Therefore:

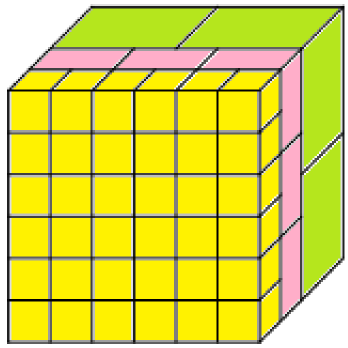
$$20 = 27 - (8 - 1) = 27 - 7.$$
$$50 = 64 - 2 \cdot (8 - 1) = 64 - 2 \cdot 7.$$

Problem 14.2. Can you cut a cube into 48 smaller cubes?

Answer: Possible $27 + 3 \cdot (8 - 1) = 27 + 3 \cdot 7 = 48$.

Problem 14.3. Can you cut the cube into 49 cubes?

Answer: Possible.



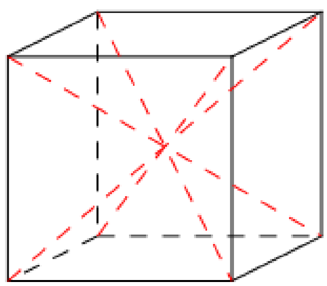
Use a cube with faces of 6 units ($6 \times 6 \times 6$). Divide it into $6 \times 6 = 36$ unit ($1 \times 1 \times 1$) cubes, $\cdot 3 \times 3 = 9$ cubes, ($2 \times 2 \times 2$) and $2 \times 2 = 4$ cubes ($3 \times 3 \times 3$). Then $36 + 9 + 4 = 49$.

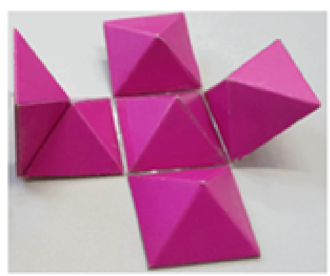
Exercise 14.1. For what n value can you cut a cube into n small cubes?

Problem 14.4. Is it possible to cut a cube into identical pyramids? Can it be cut into 3 identical pyramids?

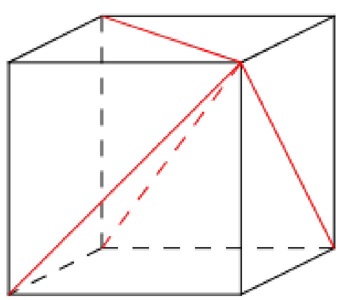
Solution:

a) Possible.
The center of the cube connected to all the vertices makes six pyramids.





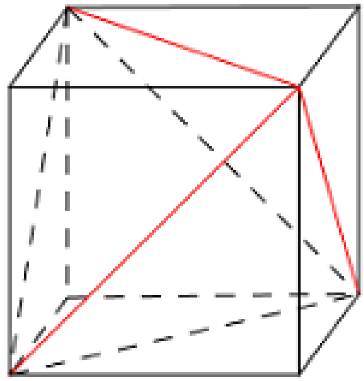
b) Possible.



Connect the vertices on one face with the other vertices on other faces and continue until you get 3 identical pyramids.

Problem 14.5. A cube is cut into tetrahedrons. At least how many tetrahedrons do we get?

Solution: Each face of the cube is a square, so it should be divided into at least two parts. Select two opposing faces (of the cube). There are four triangles without two being in the same tetrahedron. The tetrahedral faces are one of these four triangles and they will have a total volume of no more than $\frac{2}{3}$, which indicates that we need more than four tetrahedrons.

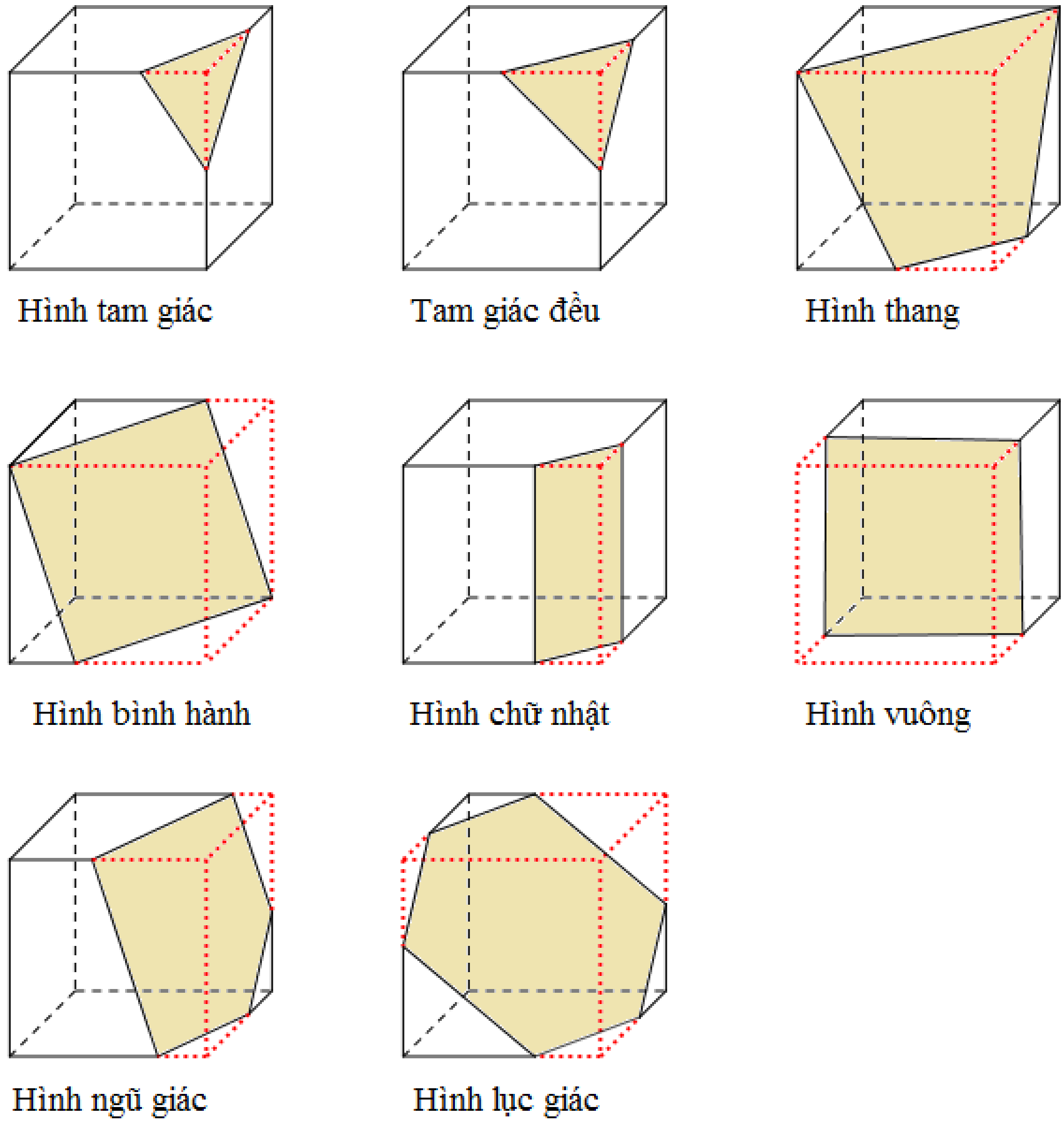


In case it can be cut into 5 tetrahedrons: select 4 vertices without two being on the same face of the cube. We get a tetrahedron. With the four faces of the tetrahedron being joined with four from the other face of the surface, we get 5 tetrahedrons that completely cover the cube (Figure).

You can find more exercises in Reference [2], [3].

15 Cut the cube by a plane

15.1 Possible cross section of the cube with a plane.

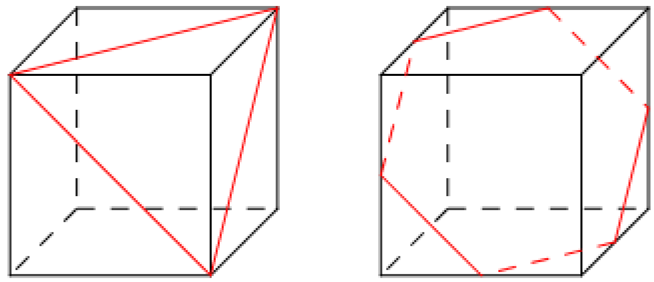


Problem 15.1. Can the cross section of a cube and a plane be...

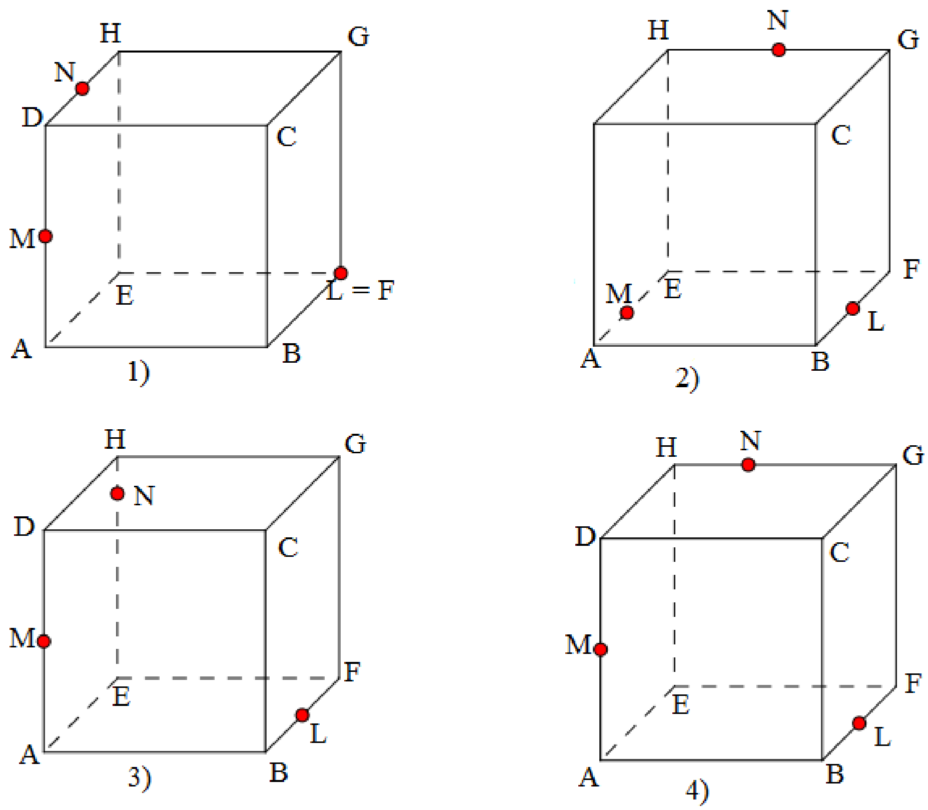
a) ...an equilateral triangle?

b) ...a hexagon?

Solution: Illustration.



Exercise 15.1. For the cube $ABCDEFGH$, the plane (p) goes through 3 points M, N and L (figure). Construct the cross section created by the $p-$plane and the cubes.

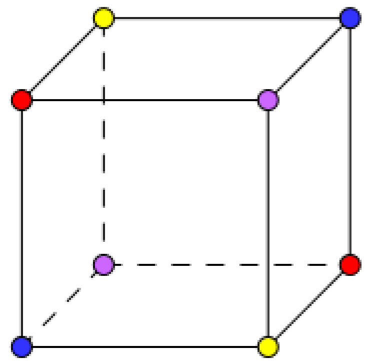


You can find more exercises in Reference [4].

16 Paint Color cubes

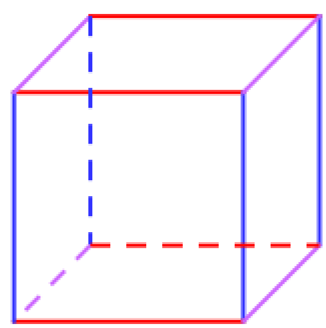
Problem 16.1. At least how many different colors can we paint the vertices of the cube so that connected vertices (those lying along the same edge) have different colors?

Solution: We need at least 4 colors.



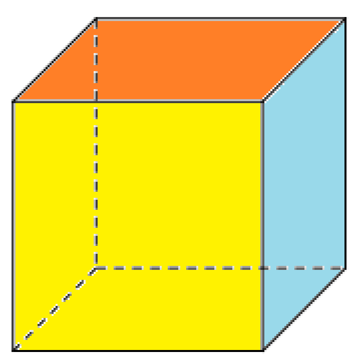
Problem 16.2. At least how many colors can you paint the edges of *a* cube so that edges sharing the same vertex have different colors?

Solution: We need 3 colors.



Problem 16.3. At least how many colors do you need to paint the faces of a cube so that the faces on the same edge have different colors?

Solution: We need at least 3 colors.



Problem 16.4. In how many ways can we paint the faces of a cube in black and white so that each face only has one color? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Solution: With two different colors, there are 8 ways to paint the cube. If we allow unicolor cubes, there are two more ways, which makes it a total of 10 solutions for a maximum of two colors. Let us have a look at the different ways and put them into a table.

Obviously, there is only 1 cube which has $0, 1, 5$ or 6 red faces.

If two faces are red, those two faces can be either adjacent or opposite to each other. These are two options and naturally there are two similar options with 4 red and 2 blue faces.

In case we have three red faces, let us add one red face to the previous scenario. If the two red faces are opposite each other, there is only one way of painting the third face red. If the two red faces are adjacent, then there is one more way of painting the cube, with each red face joining the two other red faces on two sides. This are also two options.

Number of black sides	0	1	2	3	4	5	6
Number of white sides	6	5	4	3	2	1	0
Number of way	1	1	2	2	2	1	1

A total of 10 ways.

Problem 16.5. In how many ways can we paint the faces of a cube in 6 different colors so that each face has only one color? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Solution: There are 30 ways.

First we paint one face red and place the cube standing on this face (this face will be covered). This leaves 5 faces. There are 5 ways to paint the top face. The other four faces can be rotate, so there are $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 6$ ways. This makes a total of $5 \cdot 6 = 30$ ways.

Problem 16.6. In how many ways can we paint the faces of a cube in 5 colors so that each face has only one color? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Solution: There are 75 ways.

There can be exactly 2 faces of the same color. If they are opposite faces, the other 4 faces can be painted in $\frac{4!}{4}$ ways. However, the faces of same color can also be swapped by rotation, which leaves $\frac{6}{2} = 3$ different color combinations.

If the two faces of the same color share a common edge, then the remaining 4 faces can be painted in $4! = 24$ different ways, but these contain doubles. This leaves $\frac{24}{2} = 12$ ways, which brings it to a total of $12 + 3 = 15$ different ways.

Let us not forget to multiply this number with 5 (5 different colors) to get $5 \times 15 = 75$ different ways.

Exercise 16.1. In how many ways can we paint the faces of a cube in 3 colors so that each face has only one color? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Answer: There are 30 ways.

Exercise 16.2. In how many ways can we paint the faces of a cube in 4 colors so that each face has only one color? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Answer: There are 68 ways.

Exercise 16.3. In how many ways can we paint the faces of a cube in n different colors so that each face has only one color? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Answer: $\frac{1}{24} \times (n^6 + 3 \cdot n^4 + 12 \cdot n^3 + 8 \cdot n^2)$.

Problem 16.7. In how many ways can we paint the faces of a cube in three colors (red, blue, yellow) so that there are two faces of blue, two of red, and two of yellow? Cubes that can be rotated to overlap do not count as different.

Solution: There are 6 ways.

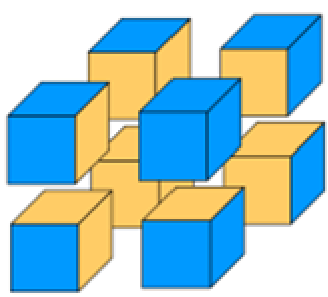
a) If the two red faces are opposite, then either the other pairs are opposite too (one way) or they are adjacent (one way). This makes it $1 + 1 = 2$ ways.

b) When the two red faces are adjacent (they have a common edge), there are two possibilities. We either have one pair of opposite sides with the same color, or all opposing sides are of different color. There are 2 ways of painting the faces in each scenario, which makes it $2 + 2 = 4$ ways.

Thus, in total, there are $2 + 4 = 6$ different ways to paint the cube.

Problem 16.8. Can we paint the faces of 8 small cubes in two colors so that we can build 2 different $2 \times 2 \times 2$ cubes from them?

Solution: A $2 \times 2 \times 2$ cube has $6 \times 4 = 24$ external faces and the same number of internal faces. For this reason only the painting seen on the figure can work. This is suitable as we can build the yellow cube by turning around the small cubes.



Problem 16.9.

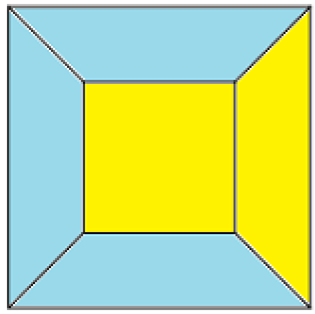
a) If we paint the faces of 27 small cubes in two colors in any way so that each face is one color, can we build a $3 \times 3 \times 3$ cube of uniform color?

b) Can we do it with the condition that each cube has an equal number of faces of each color?

Solution:

a) Impossible, paint 13 cubes red, 14 blue. Both groups will be present on the surface of the $3 \times 3 \times 3$ cube.

b) Impossible, in this case, the tube can be painted in the following way (the top face that is not visible is yellow).



None of the vertices of the cube are surrounded by the same color. Therefore, it is not always possible to build a cube of uniform color.

Exercise 16.4. There are 27 small cubes. What is the largest number of faces that we can paint red so that we cannot build a $3 \times 3 \times 3$ cube of uniform color.

Exercise 16.5.

a) There is a $3 \times 3 \times 3$ cube. Vertex A is red (while all the others are white). Tam wants to move the red cube to the opposite vertex of the cube. She can only change the layer (horizontal or vertical) containing the red cube with a neighbouring one. Cam wants to stop her from reaching her goal and uses magic to decide how many changes Tam is allowed to make (anywhere between $5 - 10$). Can Tam do it?

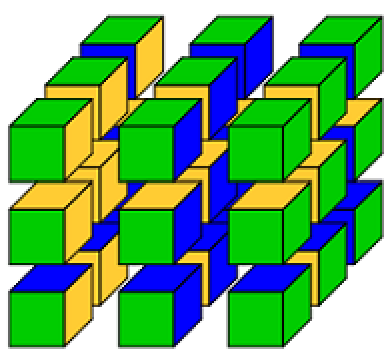
b) If Tam's goal is to move the red cube to a neighbouring position, can she do it?

Problem 16.10. Can we paint 27 small cubes in 3 different colors so that they can be joined into 3 different $3 \times 3 \times 3$ cubes of uniform color?

Solution: Let the three colors be blue, yellow and green. For a large cube we need $6 \cdot 9 = 54$ blue faces. We need the same number of tiles for the other two colors too.

Altogether we need to paint 162 faces. This is equal to the number of faces on 27 smaller cubes $(6 \cdot 27)$, thus there might be a way to solve this exercise if we paint each and every face.

Let us have a look at the blue faces. We need 8 cubes that have 3 blue faces to serve as the vertices. We also need 12 cubes with two blue faces to place between the vertices on the edges, and 6 cubes that have one blue face to go in the middle of each larger face.



Let us denote these with $B_3,\ B_2,\ B_1$. We need the same from the other two colors, let us denote them similarly.

Thus, we need 8 $B_3,\ Y_3,\ G_3$; 12 $B_2,\ Y_2,\ G_2$ and 6 $B_1,\ Y_1,\ G_1$. This can be made in the following way:
1 cube of $B_3,\ Y_3$; 1 cube of $Y_3,\ G_3$; 1 cube of $G_3,\ B_3$;
6 cubes of $B_2,\ Y_2,\ G_2$; 6 cubes of $B_3,\ Y_2,\ G_1$; 6 cubes of $Y_3,\ G_2,\ B_1$; 6 cubes of $G_3,\ B_2,\ Y_1$.

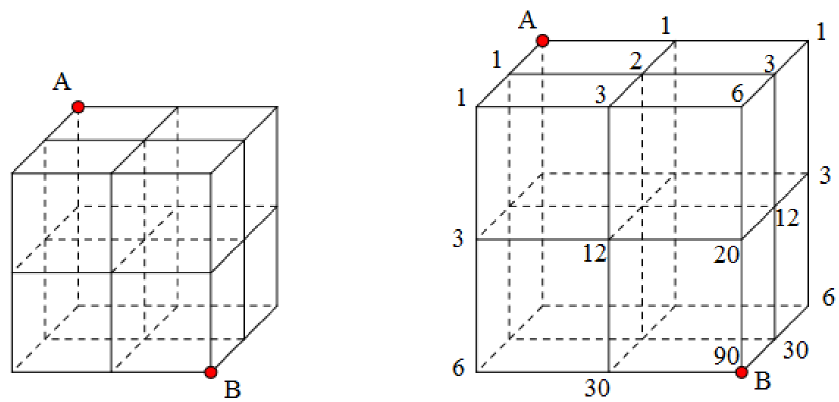
We also need to consider whether these cubes can actually painted this way and whether they can be rotated in the correct configuration, but we leave this up to the Reader.

You can find more exercises in Reference [3], [5].

17 Paths in the cube

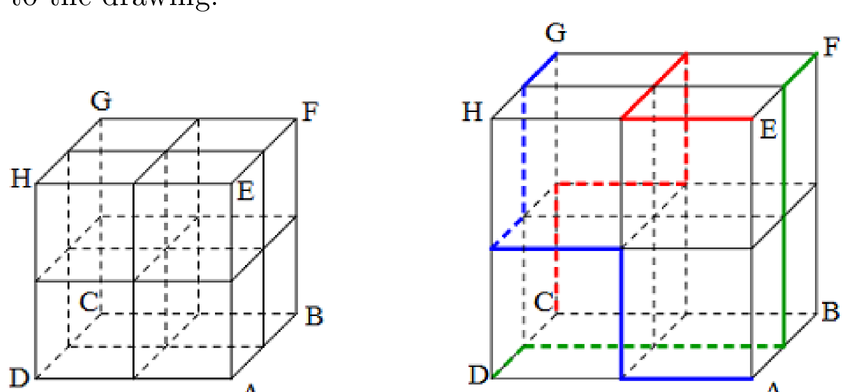
Problem 17.1. On a $3 \times 3 \times 3$ cube, how many paths go from point A to point B in a way that one can only move from node to node and can only go either right, left or down (there is also a node at the center of the cube)?

Solution: There are a total of 90 ways.
The counting method is illustrated in the figure.



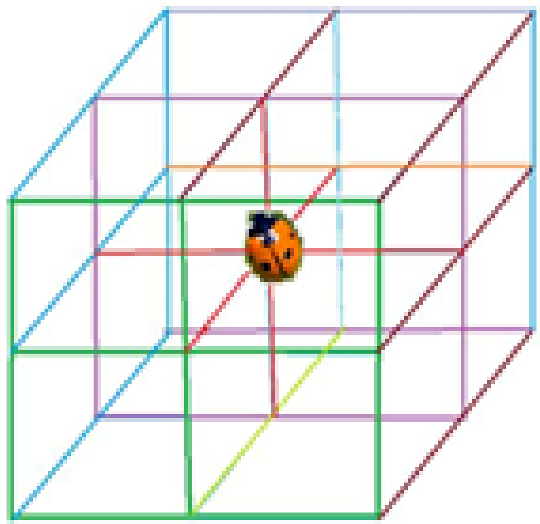
Problem 17.2. Consider a cube formed by a $3 \times 3 \times 3$ grid. The vertices are $ABCD$ and $EFGH$ where (A, E); (B, F); (C, G) and (D, H) are pairs of opposing vertices. Show that it is possible to join the edges of the cube so that the three pairs of contiguous vertices have distinct paths leading to each other without having any common vertices, but there is no such connection for 4 pairs of vertices.

Guide: Refer to the drawing.



(A,G); (D,F); (C,E)

Exercise 17.1. Orange is always thinking about math. She is going for a stroll around his glass villa. The paths are straight lines that connect the nodes. Before going, Orange wants to draw a path so the she only has to go through each node once.
Can Orange draw such a path? Please help her find the solution!



You can find more exercises in Reference [5].

18 Other exercises

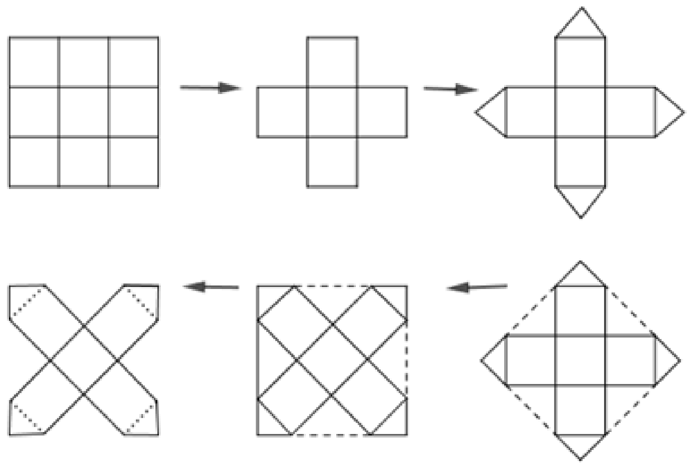
Exercise 18.1. An and Binh are playing the following dice game. On An's dice, there are the following numbers: $4, 6, 10, 18, 20, 22$. Binh's dice has $3, 9, 13, 15, 17, 25$. Both players will roll their own dice and the winner is whoever gets the larger number. Who has the advantage in this game?

Exercise 18.2. An and Binh play a dice game. Both An and Binh's dice have positive integers on their faces. Both players roll their dice and the winner is whoever gets the larger number. Is it true that if the average of the six numbers on An's dice is greater than that on Bin's, then An will have a better chance of winning than Binh?

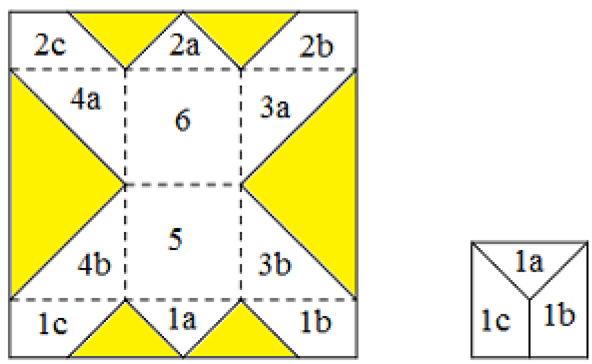
Exercise 18.3. An and Binh play a dice game. There are three empty dice on the table. An writes the numbers from 1 to 18 on the dice and picks one. Binh chooses one of the remaining dice. Both players roll their dice and the winner is whoever gets the larger number (the third dice does not play a role.) Who has the advantage, An or Binh?

Problem 18.1. From a 3×3 square cut out the frame of a cube in one piece so that the cuts are either parallel or perpendicular to each other.

Solution:
Look at the illustration for the cutting sequence. Looking at the top row, it might seem like we are cutting along the lines of the original grid, which is false. Eventually, we cut the frame of the cube out of a $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ square.



We cut at a 45^0 angle compared to the original grid, but the lines of folding are parallel to the grid lines.



(Collected at Hungarian camps in 2005)

Exercise 18.4. All 8 edges of a pyramid are equal. Is it possible to use 6 of such identical pyramids to build a cube in a way that their vertices that are parallel to their base touch?

Exercise 18.5. We have a cubic shaped cake with an even chocolate frosting on the top and the sides. How do we carve it so that everybody gets the same amount of cake and chocolate frosting?
How can we do this if we have $n = 2, 3, 4, 5$ people?
Can the exercise be solved for any natural n number?

References

1. Andrasfai Bela: Versenymatek gyerekeknek . Muszaki konyvkiadó.
2. Roka Sandor: 2000 feladat az elemi matematikai korebol. Typotex kiado.
3. Roka Sandor: Szakkori fuzetek, A kocka Toth Konyv kiado.
4. Szatmari Tunde: Interaktivitas a matematika oran, Kiindulopontunk a kocka. Szakdolgozat. ELTE. 2010.
5. Szucs Gabor: A kockak vilaga. Kalmar Laszlo Matek.verseny modszertani kiadvanya 2016.