TS. Nguyễn Văn Lợi (chủ biên) – Ngô Thị Nhã

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

PHẦN I.

LÀM QUEN QUA 108 BÀI TOÁN THỰC HÀNH

Lời nói đầu

Tài liệu này chúng tôi biên soạn dành cho các thầy cô giáo và các bạn học sinh cấp 2 – 3, với mục đích giới thiệu:

- Lý Thuyết Đồ Thị – nghành toán học cơ bản của khoa học máy tính.
- Công cụ toán học – giải các bài tập thi học sinh giỏi và chuẩn bị cho nhập môn khoa học máy tính.

Chúng tôi hy vọng tầm quan trọng thời cuộc của việc xây dựng giáo trình khoa học máy tính cấp phổ thông sẽ giúp cho tài liệu khởi đầu này được sự quan tâm thực nghiệm và đón nhận những góp ý sâu sắc cả về chuyên môn và sư phạm.
Xin chân thành cảm ơn!

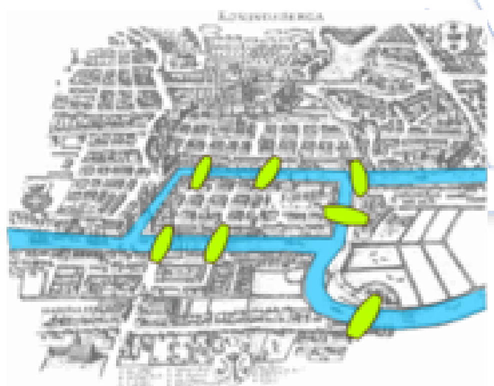
Hà Nội, ngày 20 tháng 11 năm 2017

Ý kiến xin chuyển về:
sigmathsgroup@gmail.com
loiscenter@gmail.com

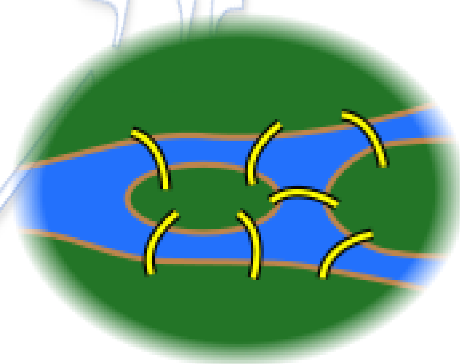
Mục lục

1 Bài toán mở đầu

1. Bài toán bảy cây cầu Euler, còn gọi là **Bảy cầu ở Königsberg** nảy sinh từ nơi chốn cụ thể. Thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm trên sông Pregel, bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Bài toán được đặt ra là tìm một tuyến đường đi qua mỗi cây cầu một lần và chỉ đúng một lần (bất kể điểm xuất phát hay điểm tới).



Năm 1736, Leonhard Euler đã chứng minh rằng bài toán này là không thực hiện được. Kết quả này là cơ sở phát triển của lý thuyết đồ thị và tạo cơ sở cho tô pô học.



2 Các bài toán có thể giải bằng graph

1. Trong một buổi dạ hội có 21 người tham gia. Một số người đã quen biết nhau, một số người chưa. Hãy chỉ ra rằng luôn luôn có hai người có số người quen biết bằng nhau (quen biết là hai chiều).

2. Hãy chỉ ra rằng từ 6 người luôn chọn được 3 người sao cho họ hoặc quen biết lẫn nhau hoặc không ai quen ai.

3. Người ta hỏi một số người trong một nhóm mỗi người có bao nhiêu người quen biết. Trong các trả lời sau các trường hợp nào có người nói dối?

a) $1, 2, 2, 3, 5, 5$

b) $5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7$

c) $3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6$

d) $1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9$

4. Vợ chồng nhà Graphic tổ chức liên hoan. Họ mời 4 cặp vợ chồng khác tham dự. Khi khách đến những người đã quen nhau từ trước đều bắt tay nhau (tất nhiên với khách lạ họ đều nghiêng mình rất lịch sự và kiểu cách). Bà Graphic nhận thấy một điều thú vị rằng trong chín người kia mỗi người đều có số cái bắt tay khác nhau. Bà ta bèn ra bài toán cho mọi người trước khi nâng ly rượu đỏ:
− Hãy vẽ graph của các cái bắt tay hôm đó? Ông Graphic bắt tay với mấy người?

5. Ba cặp vợ chồng tổ chức tiệc vui. Mỗi người đều đến vào thời điểm khác nhau. Khi đến mỗi họ đều bắt tay với người đến trước tất nhiên ngoài vợ hoặc chồng mình (hôn nhau). Khi cả 6 người đến đủ bà Graphic hỏi tất cả mọi người: Mỗi người đã chủ động chìa bắt tay người khác (khi đến) bao nhiêu lần? Và kì lạ thay mỗi người có một số khác nhau! Hỏi bà Graphic đến khi nào? Và tất nhiên đồ thị này phải vẽ thế nào?

6. Trong giải vô địch bóng bàn có 9 người tham gia. Không có trận hòa, mỗi người gặp người khác đúng một lần. Hai người đấu với nhau khi có thời gian. Kết quả các trận đấu được ghi công khai trên bảng thông tin.

a) Có bao nhiêu trận đấu trong giải?

b) CMR bất kì khi nào nhìn lên bảng đều tìm được 2 người có số trận đã chơi bằng nhau.

c) Hôm thứ 2 trên bảng thông báo đã có kết quả 10 trận đấu. CMR có người đã chơi ít nhất ván thứ ba.

7. Trong ba lớp học mỗi lớp có 30 học sinh. Mỗi học sinh từ một lớp đều có 31 người bạn từ hai lớp kia. CMR có thể chọn ra từ mỗi lớp 1 học sinh sao cho cả ba bạn quen nhau.

8. Trên mặt phẳng cho 6 điểm là đỉnh của một lục giác đều, trong lục giác cho thêm 6 điểm khác sao cho trong 12 điểm không 3 điểm nào thẳng hàng. Anh và Em tham gia một trò chơi, họ lần lượt nối hai điểm chưa được nối với nhau sao cho các đoạn thẳng không được cắt nhau (ngoại trừ đỉnh xuất phát). Người thua là người không vẽ tiếp được. Em bắt đầu cuộc chơi. Hỏi ai có chiến thuật thắng trận?

9. Có 17 nhà Graph học gửi thư cho nhau về ba đề tài toán rời rạc. CMR tìm được 3 nhà toán học đang bàn luận về cùng một vấn đề chung.

10. Trong một cuộc gặp mặt có 10 người. Cứ bất kì 3 người nào thì có 2 người bắt tay nhau. CMR tìm được 4 người đã bắt tay với nhau.

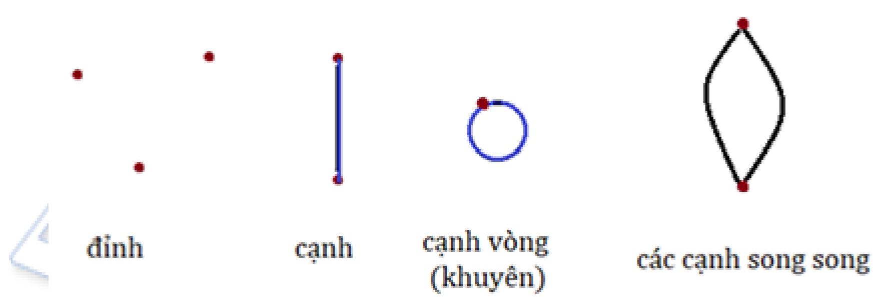
11. Cho 6 điểm bất kì sao cho khoảng cách giữa chúng khác nhau từng đôi một. Trong mỗi tam giác ta ghi cạnh dài nhất kí hiệu d và r cho cạnh ngắn nhất (dài - ngắn). CMR có đoạn thẳng được ghi cả 2 kí hiệu d và r.

12. Có thể cho hay không 6 số sao cho cứ bất kỳ 3 số nào trong chúng thì có 2 số nguyên tố cùng nhau và 2 số khác thì không?

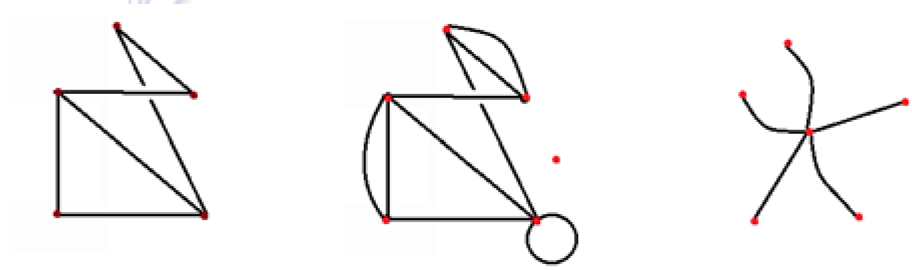
13. Mệnh đề sau đúng hay sai: Trong 6 số vô tỉ luôn có 3 số mà bất kì 2 số nào từ đó đều có tổng là số vô tỉ?

14. (Tóm tắt Đồ thị).

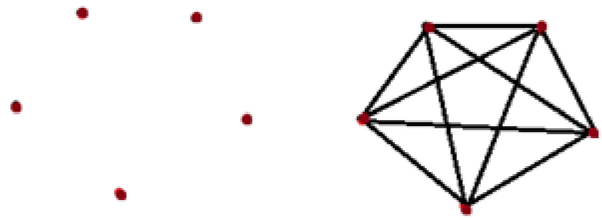
a) Đỉnh và cạnh tên thường dùng bằng tiếng Anh là gì?



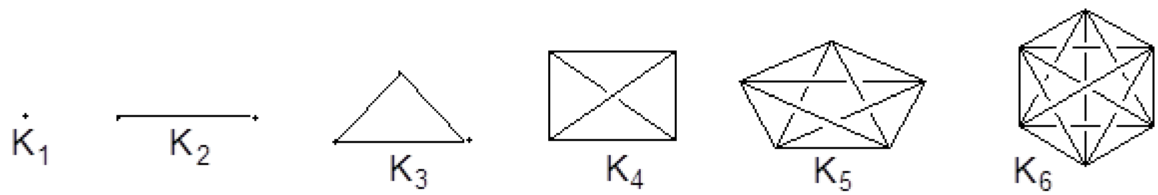
b) Đồ thị nào hình sao, đơn đồ thị, đa đồ thị?



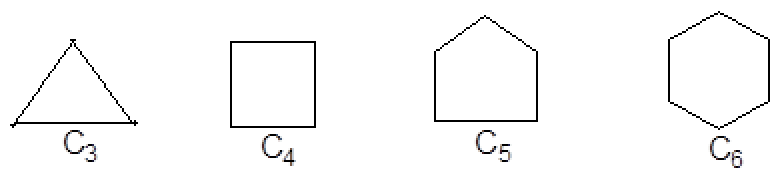
c) Nêu tên và tính chất đặc trưng của các hình sau:



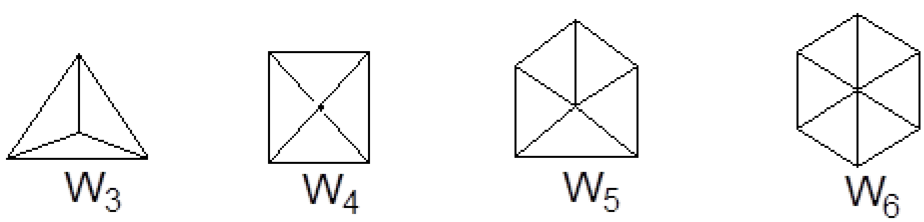
d) Tên chung của các đồ thị sau:



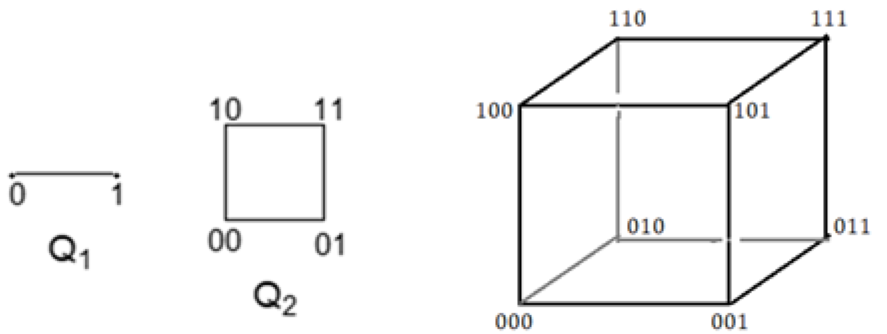
e) Tên của các đồ thị sau:



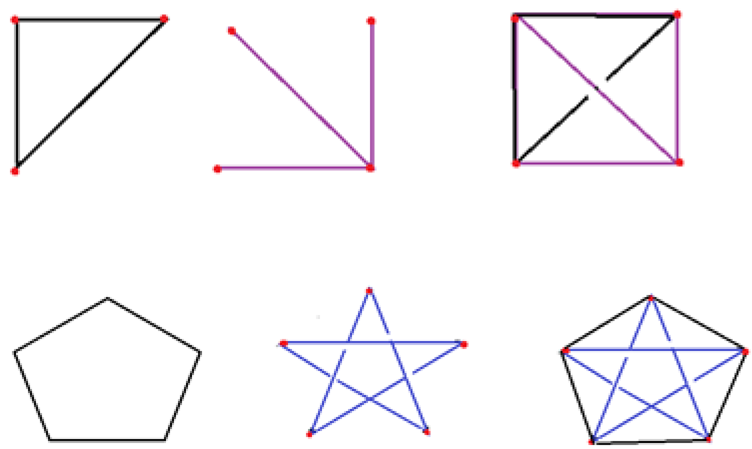
f) Tên của các đồ thị sau:



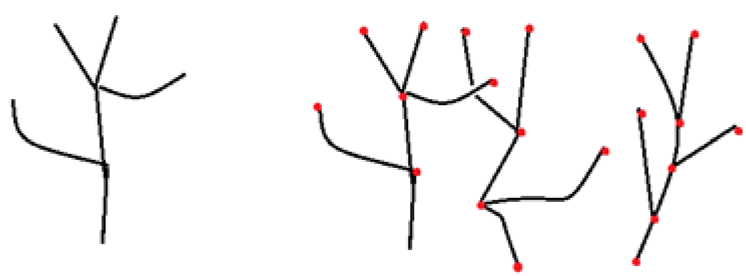
g) Hãy nêu tên và tính chất của các đồ thị sau:



h) Các đồ thị sau có quan hệ với nhau thế nào?



i) Hãy gọi tên và nêu tính chất của các đồ thị sau:

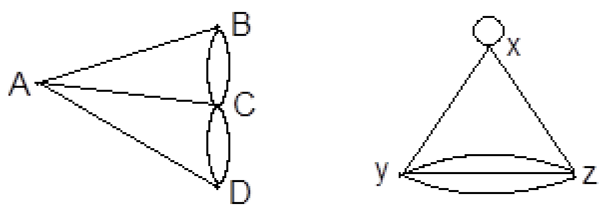


3 Lý thuyết đồ thị

3.1 Định nghĩa đồ thị (graph)

3.1.1 Đỉnh và cạnh

Đồ thị (graph) $G = (V, E)$ là một bộ gồm các đỉnh V và các cạnh E, trong đó $V \neq \emptyset$ và mỗi cạnh nối với 2 đỉnh (không nhất thiết phân biệt).



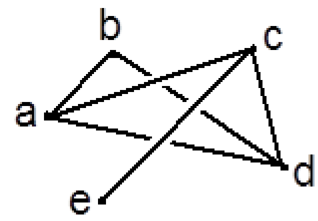
Nếu cạnh e tương ứng với 2 đỉnh v, w thì ta nói v và w là 2 đỉnh kề (hay 2 đỉnh liên kết) với nhau. Ký hiệu $e = (v, w)$ hay $e = (w, v)$ (hoặc viết đơn giản hơn $e = vw$, hoặc $e = wv$ − nếu không gây hiểu nhầm). Cạnh (v,v) tương ứng với 2 đỉnh trùng nhau gọi là một vòng hay khuyên tại v. Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh được gọi là 2 cạnh song song hay cạnh bội. Đồ thị không có cạnh song song và cũng không có vòng được gọi là đơn đồ thị. Ngược lại là đa đồ thị.
Ta có thể hình dung như một vùng quê. Các đỉnh (điểm) là các làng, các cạnh chính là các con đường nối các làng với nhau. Đây là một bản đồ.

Đồ thị mà mọi cặp đỉnh của nó đều kề nhau được gọi là đồ thị đầy đủ. Đơn đồ thị đầy đủ bao gồm n đỉnh được ký hiệu: K_n. *Hay nói cách khác một vùng quê mà làng nào cũng có đường đi trực tiếp đến làng khác, thì đây là một làng quê đầy đủ.*

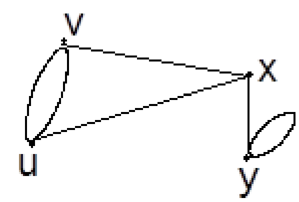
Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là một đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $V' \subset V$; $E' \subset E$.
Hiển nhiên: *Một phần thì thường hay được gọi là phần con.*
Một đồ thị có thể được biểu diễn bằng liệt kê, hình học (*hình vẽ*), một ma trận hay một bảng số (*cho những người thích trừu tượng*).
Người ta thường hiển thị hình học của đồ thị như sau:

- Cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một điểm (vòng tròn nhỏ, ô vuông nhỏ).
- Một cạnh được biểu diễn bởi một đường (cong hay thẳng) nối 2 đỉnh liên thuộc với cạnh đó.

Ví dụ 3.1. Đồ thị G có liệt kê: $V = \{a, b, c, d, e\}$; $E = \{ab, ac, ad, bd, cd, ce\}$. Được biểu diễn hình học (vẽ) như sau:



Ví dụ 3.2. Đồ thị G có: $V = \{u, v, x, y\}$; $E = \{uv, uv, ux, vx, xy, yy\}$. Được biểu diễn hình học như sau:



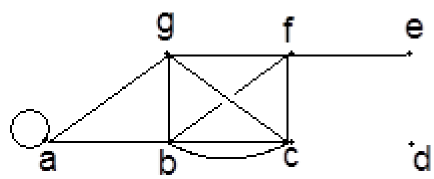
Chú ý: Khi biểu diễn hình học các đồ thị, giao của các cạnh chưa chắc là đỉnh của đồ thị (*đường trên cao và đường ngầm có gặp nhau đâu*).

3.1.2 Bậc của đỉnh trong đồ thị

Định nghĩa: Đỉnh v của đồ thị G được gọi là có bậc n nếu v kề với n đỉnh khác (v là đầu mút của n cạnh). Ký hiệu: $deg(v)$ hay $d(v)$. (Ý nghĩa: *Từ một làng có bao nhiêu đường xuất phát*).

- Mỗi vòng (khuyên) tại v được kể là 2 cạnh tới v (l*làng có đường vành đai*).
- Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập.
- Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo (pendant vertex) – (*đỉnh độc đạo*).
- Đỉnh mà được nối với tất cả các đỉnh khác thì được gọi là *đỉnh đầy đủ.*
- Cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo (pendant edge) – (*đường độc đạo*).
- Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là đồ thị rỗng (null graph).

Ví dụ 3.3. Cho đồ thị sau:



Ta có: $deg(a) = 4$; $deg(b) = 5$; $deg(c) = 4$; $deg(d) = 0$; $deg(e) = 1$; $deg(f) = 4$; $deg(g) = 4$...

Định lý 3.4. *Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$, tổng số bậc của các đỉnh của G bằng 2 lần số cạnh.*

Chứng minh. Mỗi cạnh thì có hai đỉnh. □

Hệ quả: Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$, ta có:

1. Số các đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.
2. Tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn.

Định lý 3.5. *Trong đơn đồ thị $G = (V, E)$, nếu $|V| \geq 2$ thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.*

Định lý 3.6. *Trong đơn đồ thị $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$ có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc bậc $n - 1$.*

Hai định lý này có sử dụng sự đối ngẫu: Không có gì cả <> Có tất cả.

Minh họa dùng đồ thị chứng minh bài toán.

Ví dụ 3.7. Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý có ít nhất 2 đại biểu tham gia trở lên, luôn luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đã đến dự họp.

Chứng minh. **Bước 1:** Xây dựng đồ thị $G = (V, E)$ mô tả đầy đủ các thông tin của bài toán:

+ *Đỉnh:* Đối tượng của bài toán ở đây là đại biểu dự họp. Vậy, mỗi đỉnh $v \in V$ biểu diễn cho một **đại biểu** trong cuộc họp.

+ *Cạnh:* Trong đồ thị G các đỉnh v_i và v_j được nối với nhau bằng một cạnh nếu hai đại biểu v_i và v_j quen nhau. Vậy, **mối quan hệ** giữa 2 đối tượng ở đây là mối quan hệ **quen biết**. Mỗi cạnh nối 2 đỉnh v_i và v_j trong G nếu hai đại biểu v_i và v_j quen nhau.

Bước 2: Suy luận để suy ra điều cần chứng minh:

+ Với cách xây dựng đồ thị G như đã trình bày thì số đỉnh của G chính là số đại biểu đến dự họp $|V| \geq 2$ và bậc của mỗi đỉnh trong G bằng đúng số đại biểu quen với đại biểu được biểu diễn bằng đỉnh này.

+ Theo định lý 2, ta có trong G tồn tại ít nhất 02 đỉnh có cùng bậc nghĩa là luôn luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đã đến dự họp.

□

Ví dụ 3.8. Chứng minh rằng số người mà mỗi người đã có một số lẻ lần bắt tay nhau trên trái đất này là một con số chẵn.

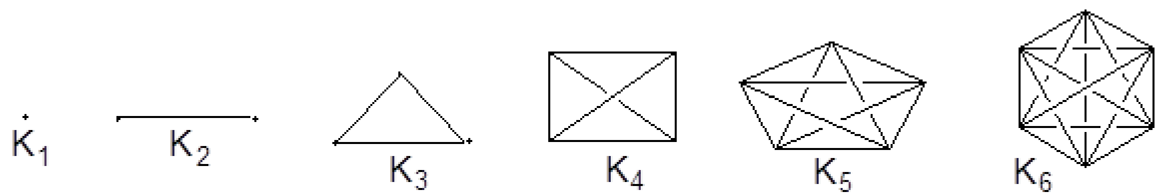
HD: Số người trên trái đất là hữu hạn. Không tính trường hợp tự bắt tay.

3.1.3 Một số đồ thị đặc biệt.

a) Đồ thị đầy đủ.

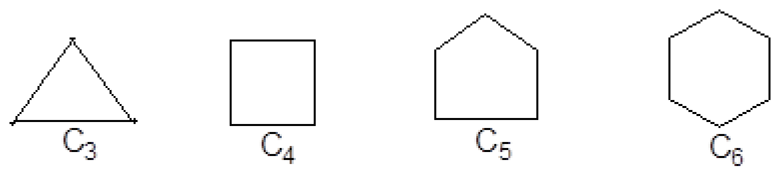
Định nghĩa: Đồ thị đầy đủ (Complete graph), ký hiệu: K_n là một đơn đồ thị bao gồm n đỉnh mà mọi đỉnh đều có bậc $n-1$ (mỗi đỉnh đều nối với $n-1$ đỉnh còn lại).
Nói cách khác, một đơn đồ thị có các đỉnh là kề nhau được gọi là đồ thị đầy đủ.

Ví dụ 3.9.



b) Đồ thị vòng

Định nghĩa: Đồ thị vòng ký hiệu: C_n, $n \geq 3$ là một đồ thị với n đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ và các cạnh $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_nv_1$.



Vậy C_n có:

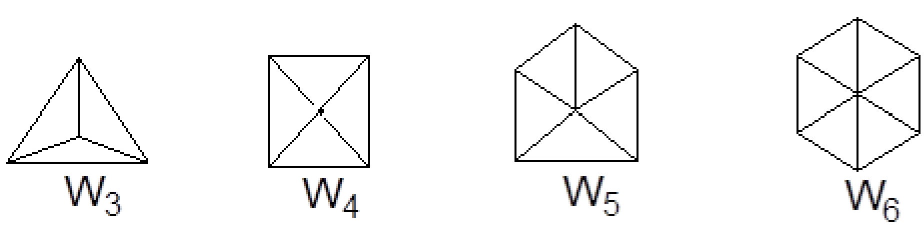
+ Số đỉnh: $|V| = n > 2$

+ Bậc của tất cả các đỉnh bằng 2;

+ Số cạnh bằng n.

c) Đồ thị hình bánh xe

Định nghĩa: Nếu thêm một đỉnh vào đồ thị vòng C_n ($n \geq 3$) và nối đỉnh này với n đỉnh của C_n thì ta được đồ thị hình bánh xe (Wheel graph), ký hiệu: W_n.



d) Đồ thị đều

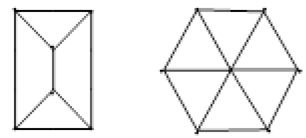
Định nghĩa: Một đồ thị đều (Regular graph) là đồ thị mà mọi đỉnh đều có cùng bậc. Nếu đồ thị G có các đỉnh có cùng bậc k thì được gọi là k−đều, hay còn gọi là *đồ thị đều bậc k*.

Ví dụ 3.10. + Đồ thị rỗng gồm n đỉnh là đồ thị đều bậc 0.

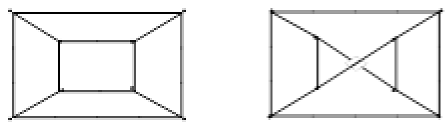
+ C_n là đồ thị đều bậc 2.

+ K_n là đồ thị đều bậc $(n-1)$.

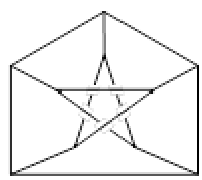
+ Đồ thị 3−đều 6 đỉnh:



+ Đồ thị 3−đều 8 đỉnh:



+ Đồ thị đều bậc 3: đồ thị Petersen (đồ thị đều bậc 3).



Vậy đồ thị k−đều n đỉnh có:

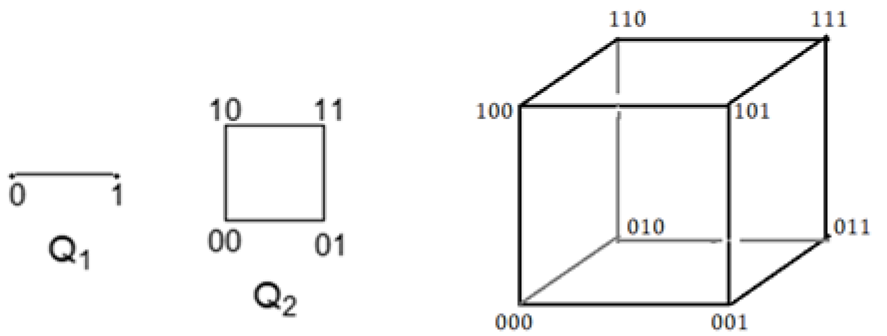
+ Số đỉnh: n.

+ Bậc của tất cả các đỉnh bằng k.

+ Số cạnh: $\dfrac{n \cdot k}{2}$.

e) Các khối n−lập phương
Các khối n−lập phương (n−cube graph), ký hiệu: Q_n là các đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một dãy số nhị phân với độ dài n. Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các dãy nhị phân biểu diễn chúng chỉ khác nhau đúng 1 bit (dãy nhị phân độ dài n là dãy chỉ chứa n chữ số 0 và 1).

Ví dụ 3.11.



Vậy Q_n có:

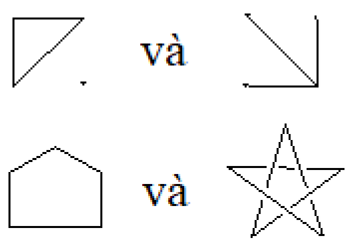
+ Số đỉnh: 2^n

+ Bậc của các đỉnh: n

+ Số cạnh: $n \cdot 2^{n-1}$

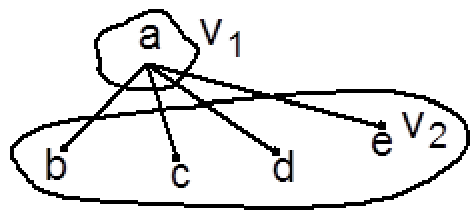
f. Đồ thị bù
Hai đơn đồ thị G và G' được gọi là bù với nhau nếu chúng có chung các đỉnh, cạnh nào thuộc G thì không thuộc G' và ngược lại.

Ví dụ 3.12. Đồ thị và phần bù của nó:



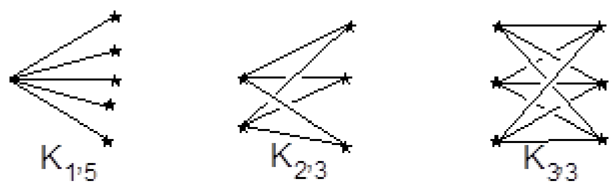
g) Đồ thị lưỡng phân
Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân (bipartie graph hay con gọi matching graph = đồ thị kết đôi) nếu tập hợp các đỉnh V của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng V_1 và V_2, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.

Ví dụ 3.13.



Một đồ thị lưỡng phân mà mỗi đỉnh của V_1 (có m đỉnh) đều kề với mọi đỉnh của V_2 (có n đỉnh), được gọi là một đồ thị lưỡng phân đầy đủ, ký hiệu: $K_{m,n}$.

Ví dụ 3.14.



K_3 là không phải là đồ thị lưỡng phân vì nếu ta chia các đỉnh của nó thành 2 phần rời nhau thì một trong 2 phần này phải chứa 2 đỉnh. Nếu đồ thị là lưỡng phân thì các đỉnh này không thể nối với nhau bằng một cạnh. Nhưng trong K_3 mỗi đỉnh được nối với đỉnh khác bằng một cạnh.

3.1.4 Sự đẳng cấu của các đồ thị

Định nghĩa: Hai đồ thị hữu hạn G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu nếu các đỉnh của chúng được đánh số lần lượt từ $1, 2, 3, ..., n$ sao cho nếu từ hai đỉnh i và j có cạnh nối nhau trong G_1, thì trong G_2 hai đỉnh i và j tương ứng cũng được nối với nhau và ngược lại nếu trong G_1 không được nối thì trong G_2 cũng không.

Chú ý: Nếu 2 đồ thị G_1 và G_2 là đẳng cấu thì chúng có:

+ Số đỉnh bằng nhau.

+ Số cạnh bằng nhau.

+ Hai đỉnh tương ứng có cùng bậc.

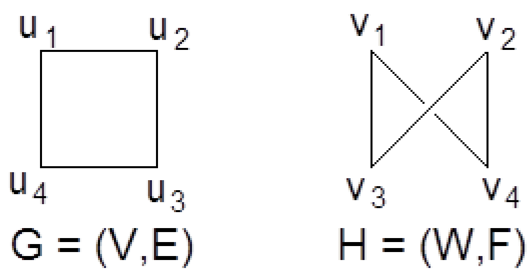
Đây là các **điều kiện cần** để hai đồ thị là đẳng cấu.

Để chứng minh hai đồ thị đẳng cấu ta cần:

+ Chứng minh điều kiện cần thỏa mãn.

+ Xây dựng một song ánh bảo toàn quan hệ liền kề giữa hai đồ thị (điều kiện đủ để hai đồ thị đẳng cấu).

Ví dụ 3.15. Chứng minh rằng hai đồ thị sau là đẳng cấu với nhau:



Xét điều kiện cần:

+ Hai đồ thị G và H đều có 4 đỉnh,

+ Hai đồ thị G và H đều có 4 cạnh,

+ Các đỉnh của hai đồ thị đều có bậc 2.

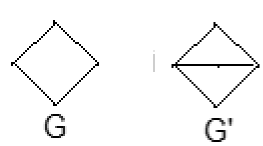
Vậy điều kiện cần thỏa mãn.

Xét điều kiện đủ:
Xét phép tương ứng $f : V \to W$

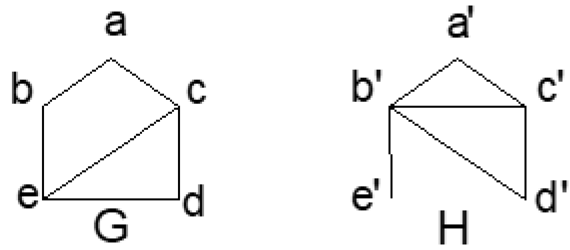
$$u_1 \to v_1;\ u_2 \to v_4;\ u_3 \to v_2;\ u_4 \to v_3$$

$\Rightarrow$ f là song ánh và bảo toàn quan hệ liền kề, điều kiện đủ thỏa. Vậy hai đồ thị G và H đẳng cấu với nhau. Một số ví dụ không đẳng cấu:

Ví dụ 3.16. a) Số đỉnh khác nhau:



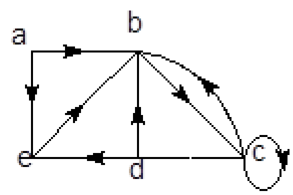
b) G và H có cùng số cạnh, số đỉnh nhưng H có đỉnh e' bậc 1, trong khi đó G không có đỉnh nào bậc 1. Điều kiện cần không thỏa mãn $\Rightarrow$ G và H không đẳng cấu.



3.2 Đồ thị có hướng (Directed graph)

3.2.1 Định nghĩa

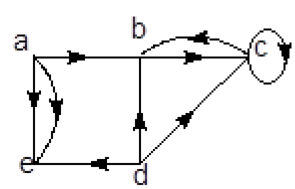
Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm tập hợp các đỉnh V và tập hợp các cạnh E bao gồm các cặp sắp thứ tự các phần tử của V. Cạnh e tương ứng với một cặp thứ tự (a,b) của 2 đỉnh $a, b \in V$ được gọi là một cạnh có hướng từ a đến b. Ký hiệu: $e = \vec{ab}$. a được gọi là đỉnh đầu, b được gọi là đỉnh cuối của cạnh e. Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên (vòng) là trùng nhau.



3.2.2 Bậc của đỉnh trong đồ thị có hướng

+) Định nghĩa **bậc vào**: Cho G là đồ thị có hướng, bậc vào của đỉnh v, ký hiệu: deg^-(v) (hoặc $din(v)$) là số cạnh có đỉnh cuối là v.
+ Định nghĩa **bậc ra**: Cho G là đồ thị có hướng, bậc ra của v, ký hiệu: deg^+(v) (hay $dout(v)$) là số cạnh có đỉnh đầu là v.
Chú ý: Một vòng tại một đỉnh sẽ góp thêm một đơn vị vào bậc vào và bậc ra của đỉnh này.

Ví dụ 3.17.



+ Đối với đỉnh a: $din(a) = 0$, $dout(a) = 3$;

+ Đối với đỉnh b: $din(b) = 3$, $dout(b) = 1$;

+ Đối với đỉnh c: $din(c) = 3$; $dout(c) = 2$;

+ Đối với đỉnh d: $din(d) = 0$; $dout(d) = 3$;

+ Đối với đỉnh e: $din(e) = 3$; $dout(e) = 0$.

Định lý 3.18. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị.*

Một đồ thị có hướng được gọi là **cân bằng (balanced)** nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc vào và bậc ra bằng nhau.

Ví dụ 3.19. Có một nhóm gồm 9 đội bóng bàn thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi sau khi có kết quả thi đấu của tất cả các đội có thể có trường hợp bất kỳ đội nào trong 9 đội này cũng đều thắng đúng 5 đội khác trong nhóm được không? (Lưu ý trong thi đấu bóng bàn không có trận hòa).

3.3 Tính liên thông của đồ thị

3.3.1 Đường đi

Định nghĩa: Đường đi (path) có độ dài n từ v_0 đến v_n với n là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh liên tiếp $v_0v_1, v_1v_2, ..., v_{n-1}v_n$. Đỉnh v_0 được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v_n được gọi là đỉnh cuối. Đường đi này thường được viết gọn: $v_0v_1v_2...v_{n-1}v_n$. Khi chỉ cần nêu ra đỉnh đầu v_0 và đỉnh cuối v_n của đường đi, ta viết: đường đi $v_0 - v_n$.

Một đường đi không qua cạnh nào lần thứ hai được gọi là **đường đi đơn giản (đường đi đơn)**.

Một đường đi không qua đỉnh nào lần thứ hai được gọi là **đường đi sơ cấp**.

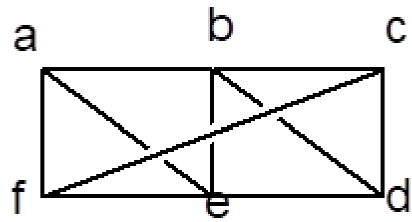
Lưu ý: Một đường đi sơ cấp là một đường đi đơn giản nhưng một đường đi đơn giản có thể không là đường đi sơ cấp).

3.3.2 Chu trình

Định nghĩa: Một đường đi khép kín (đỉnh đầu $\equiv$ đỉnh cuối) và có độ dài $n \geq 3$ được gọi là một chu trình (Cycle).

Chu trình không đi qua cạnh nào lần thứ hai được gọi là **chu trình đơn giản**.

Chu trình không đi qua đỉnh nào lần thứ hai, trừ đỉnh đầu $\equiv$ đỉnh cuối, được gọi là **một chu trình sơ cấp**.



– abcdbe là một đường đơn giản.

– eabdc là một đường đi sơ cấp ...

Định lý 3.20. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $|V| \geq 3$ và với mọi $v \in V$ có $d(v) \geq 2$ thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp.*

Chứng minh. Vì G là một đồ thị hữu hạn, mỗi đường sơ cấp qua từng đỉnh không quá một lần, nên số đường sơ cấp trong G là hữu hạn. Do đó, ta luôn xác định được đường đi sơ cấp có độ dài cực đại trong số các đường đi sơ cấp có trong đồ thị $G = (V, E)$.
Giả sử : $\alpha = v_1 v_2 ... v_{k-1} v_k$ là một trong các đường đi sơ cấp có độ dài cực đại. Do bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 2 (*với mọi $v \in V$ có $d(v) \geq 2$*), nên đỉnh v_1 phải kề với một đỉnh u nào đó và $u \neq v_2$. Xét 2 trường hợp:

+ Nếu đỉnh $u = v_i$ $(3 \leq i \leq k)$, khi đó trong đồ thị G sẽ có một chu trình sơ cấp $\beta = v_1 v_2 ... v_{i-1} v_i v_1$.

+ Ngược lại, nếu đỉnh $u \neq v_i (3 \leq i \leq k)$, khi đó trong G tồn tại đường sơ cấp $\gamma = u v_1 v_2 ... v_{i-1} v_i$ có độ dài lớn hơn đường sơ cấp α có độ dài lớn nhất đã chọn (mâu thuẫn). Vậy đỉnh $u = v_i (3 \leq i \leq k)$ trong đồ thị G có một chu trình sơ cấp.

□

Định lý 3.21. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $|V| \geq 4$ và với mọi $v \in V$ có $d(v) \geq 3$ thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn.*

Chứng minh. Giả sử α là một đường sơ cấp có độ dài cực đại trong đồ thị $G = (V, E)$:

$$\alpha = v_1 v_2 v_3 \cdots v_{i-1} v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j v_{j+1} \cdots v_{k-1} v_k$$

Vì α là đường sơ cấp có độ dài cực đại và bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 3, nên đỉnh v_1 phải kề với 2 đỉnh v_i và v_j khác thuộc đường α với $3 \leq i \leq k$, $3 \leq j \leq k$. Khi đó trong G có 2 chu trình sơ cấp:

$$+\alpha_1 = v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_i v_1$$

và

$$+\alpha_2 = v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_i \cdots v_{j-1} v_j v_1$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

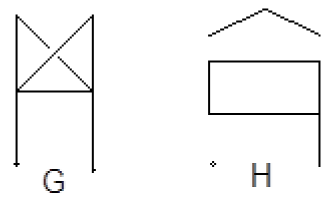
+ Nếu một trong hai đường sơ cấp $\alpha_1 \alpha$ hoặc α_2 có độ dài chẵn thì ta có điều phải chứng minh.

+ Ngược lại, nếu cả hai đường sơ cấp α_1 và α_2 đều có độ dài lẻ thì khi đó đường đi sơ cấp: $\alpha_3 = v_1 v_2 v_3 \cdots v_{i-1} v - i$ có độ dài chẵn và đường sơ cấp: $\alpha_4 = v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j v_1$ có độ dài lẻ, nên chu trình: $\alpha_5 = v_1 v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j v_1$ có độ dài chẵn (điều phải chứng minh).

□

3.3.3 Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

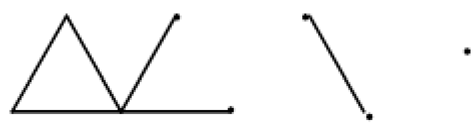
Định nghĩa: Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.



G: liên thông và H: không liên thông.

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và $v \in V$. V' là tập hợp các đỉnh của V liên thông với v, E' là tập hợp các cạnh nối 2 đỉnh của V'. Khi đó đồ thị $G' = (V', E')$ gọi là thành phần liên thông (connected component) của G chứa v. Đương nhiên nếu v và u liên thông trong G thì thành phần liên thông của G chứa v cũng là thành phần liên thông chứa u.

Ví dụ 3.22. Đồ thị có 3 thành phần liên thông.



Định lý 3.23. *Đồ thị $G = (V, E)$ là liên thông khi và chỉ khi G có duy nhất một thành phần liên thông.*

3.3.4 Đỉnh cắt và cầu

Đỉnh cắt: Nếu việc xóa đi một đỉnh $v \in V$ và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra một đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị xuất phát. Các đỉnh v như thế được gọi là đỉnh cắt (cut point) hay điểm khớp.

Cầu: Nếu trong đồ thị G ta bỏ đi cạnh e sẽ tạo ra nhiều thành phần liên thông hơn G thì e được gọi là cầu (bridge).

Ví dụ 3.24. Tìm các đỉnh cắt và cầu trong đồ thị:

Đỉnh cắt của G: b, c, e.
Cầu: ab, ce.

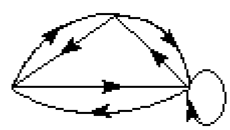
Chú ý: Không phải đồ thị nào cũng có đỉnh cắt và cầu.

Định lý 3.25. *Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$ có ít nhất $n = 02$ đỉnh $|V| = n \geq 2$. Nếu $\forall v_1, v_2 \in V$ thỏa mãn $d(v_1) + d(v_2) \geq n$ thì G là đồ thị liên thông.*

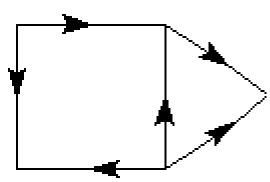
Hệ quả: Trong mọi đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh, nếu mọi đỉnh $v \in V$ có $d(v) \geq \frac{n}{2}$ thì G là đồ thị liên thông.

3.3.5 Tính liên thông trong đồ thị có hướng

Liên thông mạnh (Strongly connected)
Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu có đường đi từ a đến b và từ b đến a ∀ a, b ∈ đồ thị. Ví dụ:



Liên thông yếu (Weakly connected)
Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông. Ví dụ:



Đồ thị có hướng G được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ.

Định lý 3.26. *Nếu trong đồ thị $G = (V, E)$ có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông với nhau.*

Chứng minh. Giả sử đồ thị $G = (V, E)$ có đúng hai đỉnh bậc lẻ v và w nhưng hai đỉnh này lại không liên thông với nhau. Khi đó v và w phải thuộc vào 2 thành phần liên thông G_1, G_2 khác nhau của G. Chẳng hạn $v \in G_1$ và $w \in G_2$. Theo giả thuyết do G chỉ có đúng 2 đỉnh bậc lẻ nên trong mỗi đồ thị con G_1 và G_2 chỉ có đúng một đỉnh bậc lẻ. Mâu thuẫn với tính chất số đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn. Vậy v và w phải liên thông với nhau. □

Định lý 3.27. ***(Định lý về điều kiện cần và đủ của một đồ thị lưỡng phân)***
Đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có độ dài chẵn.

Chứng minh. Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị lưỡng phân và tập đỉnh V của G được chia thành hai tập con V_1 và V_2. Khi đó, dọc theo chu trình bất kỳ của G thì các đỉnh thuộc tập V_1 và tập V_2 sẽ lần lượt nằm liên tiếp và xen kẽ nhau. Do đó, khi trở về đỉnh xuất phát đầu tiên, ta phải đi qua một số chẵn các đỉnh và do đó chiều dài của chu trình là một số chẵn.

Ngược lại, giả sử rằng G là một đồ thị có tính chất là tất cả các chu trình của G đều có độ dài chẵn. Ta sẽ chứng minh tất cả các thành phần liên thông của G đều là đồ thị lưỡng phân và do đó G cũng là một đồ thị lưỡng phân.

Thật vậy, giả sử rằng G_1 là một thành phần liên thông của G và v_0 là một đỉnh của G_1. Với mỗi đỉnh $v \in G_1$ ta chọn một đường α nối v và v_0. Nếu đường α có độ dài chẵn thì ta đưa đỉnh v vào tập đỉnh V_1. Ngược lại, nếu α có độ dài lẻ thì ta đưa v vào tập đỉnh V_2. Sự phân loại các đỉnh của G_1 không phụ thuộc vào cách chọn đường đi α. Thật vậy, nếu có hai đường α có độ dài chẵn và α' có độ dài lẻ nối 2 đỉnh v và v_0 thì đồ thị G_1 sẽ có chu trình với độ dài lẻ, mâu thuẫn với tính chất ban đầu là G chỉ có chu trình độ dài chẵn.

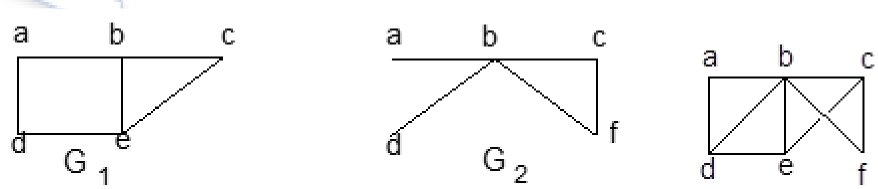
Với cách thiết lập hai tập hợp đỉnh V_1 và V_2 này, các đỉnh của đồ thị G_1 hoặc thuộc tập hợp đỉnh V_1 hoặc thuộc tập hợp đỉnh V_2. Bây giờ, ta chứng minh rằng chỉ có các cạnh nối các đỉnh không thuộc cùng một tập hợp đỉnh với nhau mà thôi. Thật vậy, giả sử rằng có 2 đỉnh v và u kề nhau trong G_1 thì chúng không thể thuộc cùng một tập hợp đỉnh V_1 hoặc V_2, nếu không ta có thể đi từ đỉnh v_0 đến đỉnh v rồi đi đến đỉnh u bằng cạnh vu rồi trở về đỉnh v_0 bằng một đường đi có độ dài lẻ. Điều này không xảy ra trong đồ thị G. Vậy G là đồ thị lưỡng phân với hai tập đỉnh rời nhau là V_1 và V_2 bằng cách mà ta đã xây dựng trên. □

3.4 Một số phép biến đổi đồ thị

3.4.1 Hợp của hai đồ thị

Hợp của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị $G = (V, E)$ có tập hợp các đỉnh là $V = V_1 \cup V_2$ và tập hợp các cạnh là $E = E_1 \cup E_2$.
Ký hiệu: $G = G_1 \cup G_2$.

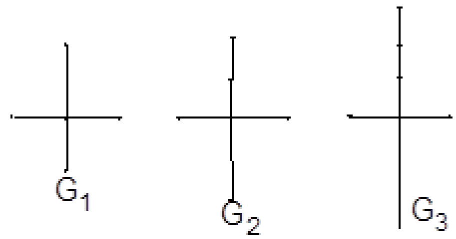
Ví dụ 3.28.



3.4.2 Phép phân chia sơ cấp

Cho đồ thị $G = (V, E)$, nếu ta bỏ đi một cạnh $e = uv$ của G và thêm vào một đỉnh mới w cùng với 2 cạnh uw và wv thì phép toán trên được gọi là phép phân chia sơ cấp.
Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là đồng phôi (homeomorphic) nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp.

Ví dụ 3.29.



G_2 và G_3 là đồng phôi vì cùng nhận được từ G_1. Rõ ràng G_2 và G_3 không đẳng cấu với nhau.

Chú ý: Hai đồ thị là đồng phôi thì chưa chắc đẳng cấu với nhau.

4 Bài luyện tập

4.1 Đỉnh, cạnh, bậc trong graph

2. Một nhóm có 5 người. Họ tổ chức đấu cờ vua, hai người đấu với nhau không quá 1 ván. CMR trong bất kì thời điểm nào cũng tồn tại 2 người có số ván đã chơi bằng nhau. Mệnh đề có còn đúng không với số người là 6 hay 10 người?

3. Trong một nhóm người bất kì, luôn có 2 người có số người quen bằng nhau (sự quen biết nhau là tương hỗ).

4. Trong một nhóm người bất kì, luôn có 2 người có số người không quen biết bằng nhau (sự không quen biết nhau là tương hỗ).

5. Tại sao hai bài toán này giống nhau? Hãy phát biểu bài toán bằng ngôn ngữ Đồ Thị!

6. Hãy tìm đơn đồ thị nhỏ nhất- sao cho không có đỉnh cô lập, và cũng không có đỉnh đày đủ - đơn đồ thị như vậy có bao nhiêu đỉnh?

Đáp số: 4

7. Có bao nhiêu đơn đồ thị có 4 đỉnh sao cho không có đỉnh cô lập, và cũng không có đỉnh đầy đủ?

8. Với những giá trị n nào thì tồn tại đơn đồ thị n đỉnh sao cho không có đỉnh cô lập, không có đỉnh đầy đủ và không có ba cạnh độc lập.

9. Hãy chỉ ra một đơn đồ thị n-đỉnh mà chỉ có duy nhất một cặp đỉnh có cùng bậc!

10. Ở một thành phố trong 1 ngày luôn có 2 telephon mà từ đó có cùng số cuộc gọi điện đi nơi khác?

Lưu ý: Đồ thị có hướng.

11. Trong một nhóm 21 người mỗi người đều viết 2 hoặc 4 lá thư cho các bạn khác, trừ một người viết 6 là thư cho người khác. Hỏi mỗi người có thể nhận được đúng 3 lá thư hay không?

Lưu ý: Đồ thi có hướng.

12. Trong một nhóm 9 người mỗi người cho 5 người khác 1đồng tiền vàng. CMR có 2 người nhận được số đồng tiền vàng bằng nhau.

HD. Phản chứng. Giả sử mỗi người nhận được số tiền khác nhau. Hãy so sánh số tiền đã cho và số tiền nhận được.

4.2 Đồ thị đầy đủ, đồ thị con, đồ thị có hướng, đồ thị bù, đồ thị cây

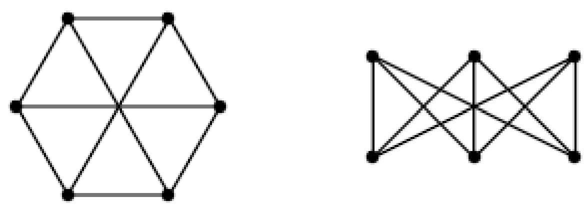
13. Hãy tìm đa diện 6 đỉnh sao cho đồ thị – được tạo bởi các đỉnh và các cạnh của nó – có các đỉnh đều có bậc 4. Có bao nhiêu đơn đồ thị 6 đỉnh mà tất cả các đỉnh có bậc 4.

14. Trong một nhóm 5 người cứ mỗi người thì biết 3 người khác, hỏi sự quen biết này có phải là hai chiều không?

KQ: không thể.

15. Trong một nhóm 6 người cứ mỗi người thì biết 3 người khác, hỏi sự quen biết này có phải là hai chiều không?

KQ: có thể. Cho 6 người ngồi quanh bàn tròn. Môi người nói với 2 người hai bên và người đối diện. Hay lay vi du về 3 người và 3 cái giếng!



16. Với n bằng bao nhiêu để trong mỗi nhóm n người, khi sự quen biết là tương hỗ, mỗi người có đúng ba người quen?

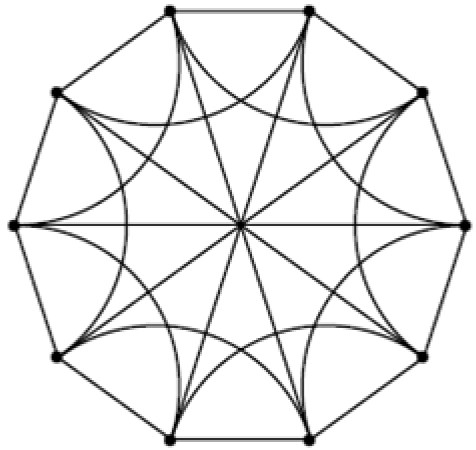
HD. Nếu n chẵn thì phương pháp trên có thể áp dụng. Trường hợp n lẻ thì không tồn tai vì định lý tổng các bậc của các đỉnh là số chẵn.

17. Với n bằng bao nhiêu để trong mỗi nhóm n người, khi sự quen biết là tương hỗ, mỗi người có đúng 6 người quen? Hãy phát biểu bài toán bằng ngôn ngữ đồ thị!

HD. Hiển nhiên $n \geq 7$. và cung chỉ cân như vậy. Lại cho mọi người bên bàn tròn và cho mỗi người làm quên với 3 bên trái và ba bên phải.

18. Với n và k nào thì tồn tại đơn đồ thị n đỉnh và k–đều?

HD. Hiển nhiên $n > k$. Nếu k chẵn thì tồn tại. Nếu k lẻ n lẻ thì tổng bậc của các định lẻ $\rightarrow$ vô lý. Nếu $k = 2l + 1$ (k lẻ) và n chẵn. Ta lai có thể thiết lập một đồ thị n đinh ngòi quanh bàn tròn. Môt đinh nối với $j + l$ đỉnh hai bên và môt đỉnh đối diện. Vi du $n = 10$ và $k = 5$ trong ví dụ sau:



19. Một nhóm có 10 người, mỗi người quen biết (tương hỗ hai chiều) 7 người khác.Hãy chỉ ra rằng bất kì 3 người nào đều có người quen chung. Hãy phát biểu bài toán bằng đồ thị!

20. CMR một đơn đồ thị $(2k-1)$ đỉnh k−đều bất kì hai đỉnh nào cũng có chung đỉnh liền kề (chung hàng xóm).
Bài toán còn đúng không với đơn đồ thị 2k đỉnh k−đều?

21. CMR đơn đồ thị $(3k-1)$ đỉnh 2k−đều bất kì 3 đỉnh nào cũng có chung đỉnh liền kề. Bài toán còn đúng không với đơn đồ thị 3k đỉnh 2k−đều?

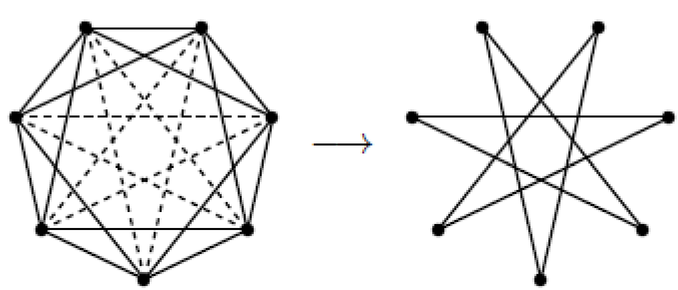
HD. Hãy chi ra rằng số điêm có thể là liên kề của môt đỉnh là $k-1$. 3 điểm thi có nhiều nhất $(3k-3)$ đỉnh. Vay con 2 đỉnh là chung (nhiêu hơn 1). Nhưng con sô nay không thể hạ thấp hơn. Ví dụ với 3k đỉnh. Lấy 3 đỉnh bất ki và chia các điểm còn lại vào 3 nhóm mỗi nhóm có một điểm kể trên. Tât cả các điêm không cung nhom đươc nối với nhau. Đồ thi nay không thỏa mãn mệnh đề.

22. Đơn đồ thị đầy đủ n đỉnh có bao nhiêu cạnh?

23. Có bao nhiêu đơn đồ thị 7 đỉnh 4-đều? Và có bao nhiêu đơn đồ thị 9 đỉnh 6-đều?

HD. Quan sát đồ thị phần bù.

- Có 2 đơn đồ thị 7−đỉnh và 4−đều:



- 4 đơn đồ thị 9 đỉnh và 6−đều có 4 trường hợp.

24. Một đơn đồ thị n đỉnh có nhiều nhất bao nhiêu cạnh để nó không có ngôi sao k đỉnh $(n > k)$?

25. Hãy vẽ phần bù của các đồ thị sau:

a) G_1 là đồ thị lập phương;

b) G_2 là đồ thị bát diện đều;

c) H_n là đồ thị đa giác đều n cạnh $n = 3, 4, 5, 6$;

d) G_3 là đồ thị với $V = \{x, y, u, v\}$, $E = \{xy, yu, uv\}$;

e) G_4 là đồ thị có các đỉnh là 7 đỉnh của thất giác đều, cạnh là các cạnh đa giác và các đường chéo nhỏ nhất.

26. Có bao nhiêu đơn đồ thị 6 đỉnh sao cho bậc của các đỉnh lần lượt là $4, 4, 4, 2, 2, 2$?

HD. Xét đồ thị phần bù : 1,1,1,3,3,3. (chỉ duy nhất có một đồ thị thỏa mãn)

27. Đơn đồ thị 10 đỉnh có 20 cạnh. Hỏi đồ thị bù của nó có bao nhiêu cạnh?

28. Với những giá trị nào của n thì mệnh đề sau đúng: Nếu G là đơn đồ thị n đỉnh, thì hoặc trong G hoặc trong phần bù có số cạnh là số lẻ.

4.3 Mối liên hệ giữa bậc của đỉnh và các cạnh

29. Người ta hỏi các thành viên của một nhóm 8 người: Bạn biết bao nhiêu người trong nhóm? Và lần lượt nhận được câu trả lời là: $3, 5, 4, 2, 5, 2, 4, 4$. Hỏi sự biết trong nhóm có phải là quen biết hai chiều được không?

HD. Không. Vì tổng của các bậc là số lẻ.

30. Trong một nhóm 10 người, mỗi người tự đếm số người mình quen biết, tất nhiên quan hệ hai chiều tương hỗ. Kết quả là có ba người có 5 người quen, hai người có 2 người, những người còn lại mỗi người đều có 4 người quen. Hãy chỉ ra rằng có người nào đó đếm nhầm.

HD. Tổng các bậc là số lẻ. Và quan hệ là 2 chiều nên dẫn đến mâu thuẫn.

31. Hãy tổng quát hóa bài toán và phát biểu bằng ngôn ngữ đồ thị.

32. Định lý về tổng các bậc của các đỉnh là số chẵn trong một đơn đồ thị còn đúng không đối với đồ thị hữu hạn bất kì?

HD. Nếu không có cạnh vòng thì mệnh đề vẫn đúng.

33. Ta có thể nói gì về số các đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị không có cạnh vòng?

34. Trong một đồ thị định hướng 10 đỉnh , các „bậc - ra" của các đỉnh lần lượt là $1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$. Hỏi đồ thị có bao nhiêu cạnh?

ĐS: 29.

35. Trong một đồ thị định hướng 9 đỉnh, các „bậc - vào" của các đỉnh lần lượt là $1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4$. Hỏi đồ thị có bao nhiêu cạnh?

ĐS: 25

36. Hãy phát biểu mối quan hệ của các bậc, và tổng các loại bậc trong đồ thị định hướng.

4.4 Đồ thị lưỡng phân

37. Hãy biểu diễn bằng hình vẽ các đồ thị đầy đủ $K_{2,2}$ và $K_{3,3}$.

38. Đồ thị nào là lưỡng phân trong các đồ thị sau:

a) Hình lập phương.

b) Hình ngũ giác đều.

c) Bát diện đều (8 đỉnh).

d) Đồ thị mà các đỉnh là 6 đỉnh của một lục giác đều, các cạnh của lục giác và các đường chéo dài nhất của lục giác là các cạnh của đồ thị?

39. Có đúng là trong một đồ thị lưỡng phân các đồ thị con cũng là đồ thị lưỡng phân?

40. Đồ thị lưỡng phân 10 đỉnh có thể có nhiều nhất bao nhiêu cạnh? Và đồ thị lưỡng phân 11 đỉnh thì sao?

41. Một đồ thị lưỡng phân n đỉnh thì có thể có nhiều nhất bao nhiêu cạnh?

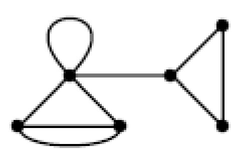
42. Với những n như thế nào thì luôn tồn tại đồ thị lưỡng phân n$-$đỉnh sao cho phần bù của nó cũng là đồ thị lưỡng phân? Hãy tìm tất cả những đồ thị như vậy.

43. Có hay không đơn đồ thị lưỡng phân mà trong đó bậc của các đỉnh là $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$? Hãy chứng minh không tồn tại hoặc tìm tất cả?

44. Có hay không đơn đồ thị lưỡng phân mà trong đó bậc của các đỉnh là $3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6$?

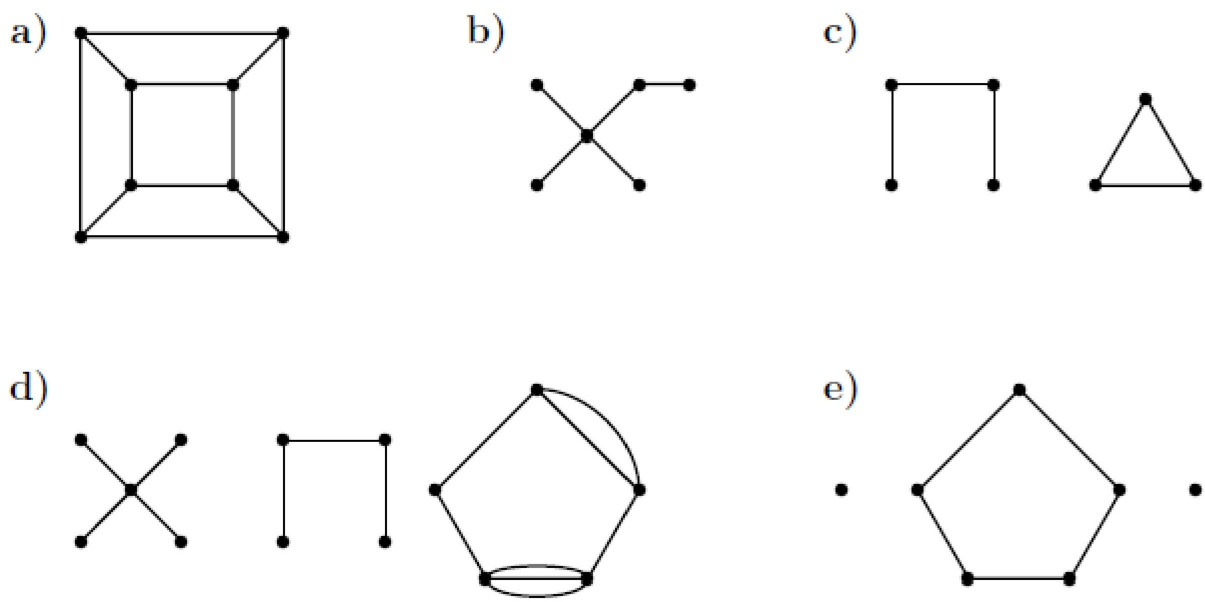
4.5 Đường đi, chu trình, liên thông

45. Trong đồ thị sau ta có thể thấy các đường đi, nhưng không là các đường đơn giản hay sơ cấp. Hãy chỉ ra hai điểm khác nhau mà giữa chúng có đường đi nhưng không có đường sơ cấp (đường đơn giản)?



46. Nếu giữa hai điểm của đồ thị có đường đi thì có đường sơ cấp? Đơn giản?

47. Cho trước một đồ thị G. Tạo đồ thị G' bằng cách: Đỉnh của G' là đỉnh của G, một cặp hai đỉnh của G' được nối với nhau bằng một cạnh nếu các điểm này được nối với nhau bằng một đường sơ cấp. Hãy biểu diễn bằng hình học các đồ thị phần bù G' của năm đồ thị G sau đây:



48. CMR một đồ thị là liên thông nếu có một đỉnh mà từ đó có đường dẫn đến đỉnh khác.

49. Hãy cho một đồ thị 6 đỉnh không liên thông, có
a) 6 b) 7 c) 9
cạnh. Có hay không đồ thị 6 đỉnh không liên thông và có 10, 11 cạnh ?

50. Mệnh đề sau đây đúng hay sai:
– Nếu các đỉnh của một đồ thị liên thông được chia thành hai phần không rỗng, thì luôn tồn tại một cạch nối hai phần với nhau?
Điều ngươợc lại còn đúng không?

51. Mệnh đề sau đây đúng hay sai:
– Nếu G là đồ thị không có cạnh khuyên, thì trong các thành phần của nó có số chẵn các đỉnh lẻ?

5 Ứng dụng

52. Năm người trong một hội gặp nhau. Người ta hỏi họ trong số này mỗi người có bao nhiêu người quen cũ. Câu trả lời lần lượt là:

A: – Tôi quen 4 người;

B: – Tôi quen ít người hơn A;

C: – Số người tôi quen bằng của D;

D: – Tôi quen ít hơn một người so với E;

E: – Số người tôi quen là số lẻ.

Hỏi C và D có quen nhau không?

HD. E quen 3 người (vì D nên không thể 1??) $\rightarrow D = 2$, $C = 2$. Cả hai phải quen A. Ít nhất một trong hai người phải quen E. Vậy C và D không thể quen nhau.

53. Hãy vẽ một sơ đồ cho một vùng có 5 thành phố giữa các thành phố có thể có các đường nối với nhau.

a) Từ các thành phố lần lượt có $1, 2, 2, 3, 4$ con đường xuất phát. Có bao nhiêu con đường trên bản đồ?

b) Từ các thành phố lần lượt có $1, 2, 2, 3, 3$ con đường xuất phát. Có bao nhiêu con đường trên bản đồ?

54. Trong một hội 9 người đều có ít nhất một người có số người quen là số chẵn – điều này có đúng không?

ĐS: Đúng.

55. Có hay không một hội 10 người mà số người quen của họ là:

a) $4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$;

b) $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 0$;

c) $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2$;

d) $9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 6, 4, 4$;

ĐS: a) không, b) không, c) có.

56. Trong một nhóm có một số người bắt tay nhau. Hỏi có luôn tìm được hai người có số cái bắt tay bằng nhau?

ĐS: Đúng (dirichlet)

57. a) Trong một hội người ta chơi với nhau một số ván cờ. Bất kì hai người nào chỉ chơi với nhau không quá một ván. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai người có số người đấu cờ với họ bằng nhau.

b) Điều khẳng định còn đúng không nếu cho phép hai người được đấu với nhau số ván tùy thích?

HD: tham khảo Bài 6.

58. Trong buổi dạ hội có 4 chàng trai và 4 cô gái tham dự - các chàng trai nhảy đôi với các cô gái. Người ta hỏi các cô gái đã nhảy với bao nhiêu chàng trai. Câu trả lời là $3, 1, 2, 2$. Cũng câu hỏi đó với các chàng trai: $2, 2, 3, 2$. Hãy chỉ ra rằng có một người nào không nói thật.

HD: Tổng các bậc của các đỉnh của đồ thị lẻ – vô lý.

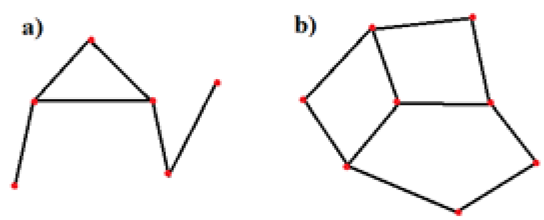
59. a) Trong buổi dạ hội có 21 chàng trai và 21 cô gái tham dự. Tất cả các chàng trai nhảy với 4 hoặc 2 cô gái, trừ một người đã nhảy với 6 cô. Hỏi khả năng các cô gái mỗi người nhảy với 3 hoặc 5 chàng trai có thể không?

b) Một hội có 21 người, tất cả đều viết thư cho 2 hoặc 4 người khác, trừ một người đã viết cho 6 người khác. Hỏi có xảy ra khả năng mỗi người nhận được 3 hoặc 5 lá thư?

HD. a) Số lần nhảy của các bạn nam là số chẵn, số lần nhảy của các bạn nữ lẻ – không thể.
b) Số thư gửi đi là số chẵn, số thư nhận được là số lẻ – vô lý.

60. Hãy vẽ các đồ thị sau nếu có thể khi bậc của các đỉnh là:
a) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ b) $5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7$

61. Trên hình vẽ là sơ đồ các làng và giữa chúng là các con đường giao thông. Biết rằng vùng này có 2 tuyến xe bus lần lượt qua các địa danh:
Tuyến I : C, E, F, B. Tuyến 2: F, C, A, D.



Trên mỗi tuyến các địa danh được ghi theo thứ tự giao thông trên đường. Hãy ghi các địa danh A tương ứng trên bản đồ a) riêng , và b) riêng.

62. Có 5 cặp vợ chồng gặp nhau. Với những người chưa quen biết, họ bắt tay nhau tự giới thiệu. Trong bữa tiệc chủ nhà hỏi tất cả mọi người đã bắt tay với bao nhiêu người và nhận được các con số khác nhau. Hỏi vợ ông ta đã bắt tay với bao nhiêu người? Và chủ nhà đã bắt tay với bao nhiêu người?

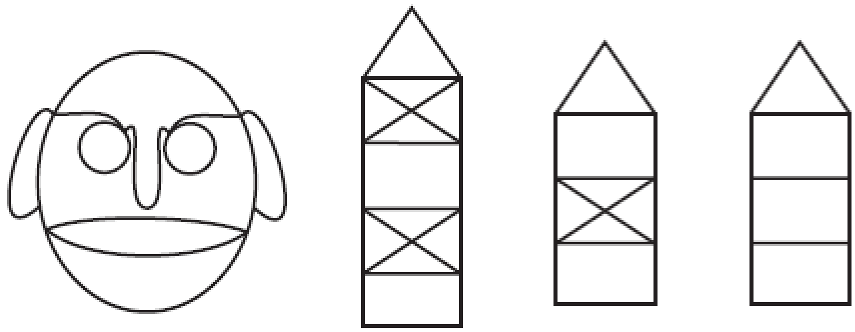
HD. Hãy chỉ ra rằng trong một gia đình số lần đi làm quen là không đổi $(8+0), (7+1), ..., (4+4)$. từ đó suy ra chỉ có cặp $(4+4)$ là chủ gia đình.

63. Có 21 bạn học sinh tham gia một cuộc gặp gỡ. Người ta lần lượt hỏi từng người có bao nhiêu bạn cùng lớp có mặt ở đây hôm nay? Trong 13 người trả lời đầu tiên có năm bạn nói 3, tám bạn nói 4. Hỏi các bạn còn lại mỗi người có bao nhiêu bạn cùng lớp có mặt, nếu biết rằng tất cả đều có ít nhất một bạn cùng lớp tham dự?

64. Có một nhóm 10 người. Biết rằng tất cả mỗi người đều quen ít nhất 7 người khác. Hãy chỉ ra rằng cứ bất kỳ 3 người trong hội đều có người quen chung. Có thể tổng quát hóa bài toán được không? Hãy dùng đồ thị để diễn đạt bài toán tổng quát.

HD. Ta chọn ra bất kì 3 người A,B,C. Người A và B ngoài những người trong nhóm A,B,C còn có ít nhất 3 người bạn chung. Ba người này sẽ có một người quen C và vì vậy quen cả nhóm A,B,C.

65. Hãy vẽ bằng một nét các hình sau, mỗi đường chỉ được đi qua 1 lần, các đường đã vẽ có thể cắt nhau.
Hãy kí hiệu điểm bắt đầu và điểm kết thúc. (Có một số hình không có lời giải).



66. Trên hình là lưới ô vuông 3x3. Hãy xếp lại hình bằng:

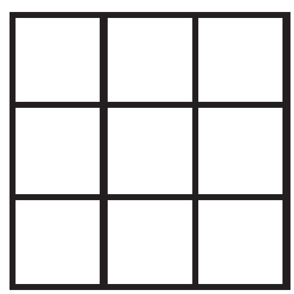
a) Tám đoạn chỉ độ dài 3;

b) Bốn đoạn chỉ độ dài 6;

c) Sáu đoạn chỉ độ dài 4;

d) Ba đoạn chỉ độ dài 8 cm.

Không được cắt các đoạn chỉ.



67. Trên bàn cờ đặt các quân cờ sao cho trên mỗi hàng và mỗi cột có:
a) Đúng ... b) Ít nhất ...
hai quân cờ. Chúng ta có thể chắc chắn rằng trong trường hợp này có thể lấy ra vài quân cờ sao cho trên bàn mỗi hàng và mỗi cột còn đúng một quân cờ?

68. Có một bộ domino. Các quân được ghi các số $0, 1, 2, ..., 10$ mỗi quân 2 số. Bộ domino của chúng ta hoàn toàn đầy đủ, tức là từ những số trên tạo ra một cặp số bất kì thì có đúng một quân domino ghi hai số đó.

a) Có thể xếp nhiều nhất bao nhiêu quân lên bàn theo đúng luật?

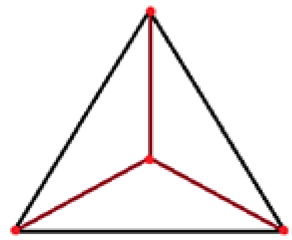
b) Tình hình thay đổi thế nào nếu các con domino được đánh số từ $0, 1, 2, ..., 9$?

69. Có bao nhiêu đồ thị 5 đỉnh mà bậc của các đỉnh là:
a) 1,2,2, 3,3 b) 1,2,2,2,3.

ĐS. Không có đồ thị như vậy.

70. Phải đặt 4 điểm trên mặt phẳng sao cho các khoảng cách được tạo thành không có 3 kích thước khác nhau.

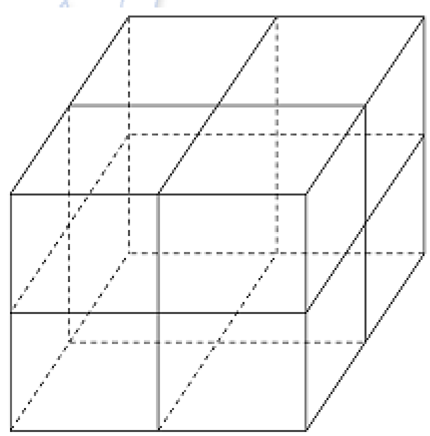
HD. Tam giác đều và trọng tâm.



71. Người ta muốn xây dựng một hệ thống đường bay giữa các thành phố lớn sao cho từ một thành phố có không quá 3 tuyến bay xuất phát đi thành phố khác, nhưng chỉ cần không quá một lần chuyển tuyến bay là có thể đến bất kì thành phố nào khác. Hỏi số thành phố lớn nhất để có thể tổ chức một mạng lưới các đường bay như vậy?

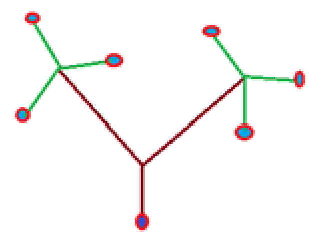
72. Ở một vùng kia có 16 lãnh chúa, mỗi lãnh chúa chỉ hòa hoãn với 3 lãnh chúa khác còn thù địch với tất cả các người còn lại. Ở một vùng cạnh đó có 8 lãnh chúa thấy đời sống của dân ở vùng thù địch đời sống gặp khó khăn, họ có thể giúp đỡ nhưng chỉ với điều kiện mỗi người chỉ được giúp 2 người khác là bạn của nhau trong vùng gặp nạn. Hỏi có thể tổ chức việc giúp đỡ sao cho tất cả các tiểu vương bị nạn đều có phần trong quà từ thiện?

73. Hình lập phương lưới $2 \times 2 \times 2$, mỗi mặt được chia thành 4 hình vuông con (có tổng cộng 24 hình vuông con) người ta chọn bất kì 26 cạnh của các hình vuông con này và sơn chúng thành mầu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một đường khép kín toàn là các cạnh mầu đỏ tạo nên.



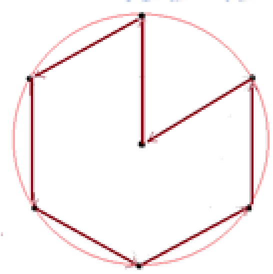
74. Phải xây dựng hệ thống đường bay cho 10 thành phố khác nhau, mỗi thành phố có thể đến thành phố khác bằng cách trực tiếp hay đổi tuyến. Hãy cho số đường bay ít nhất để có thể thực hiện đề án.

ĐS. Cây trong đồ thị.



75. Có 7 nhà thiên văn đang ngồi trên hành tinh của mình. Mỗi người đều theo dõi người ngồi gần mình nhất bằng ống nhòm. Hỏi có ai không bị theo dõi không?

Ví dụ:



76. Có 6 gươm thủ tổ chức một cuộc thi đấu vòng tròn. Hãy chỉ ra rằng trong bất kì một thời điểm nào đều có thể tìm ra 3 người hoặc họ chưa hề đấu với nhau hoặc cả ba đều đã đọ gươm với nhau từng đôi.

6 Bài tập tự luyện

77. Hãy cho một đơn đồ thị 8 đỉnh 16 cạnh và liên thông.

78. Hãy cho một đồ thị 6 đỉnh không liên thông mà bậc của các đỉnh đều bằng 2.

79. Một đồ thị có các đỉnh là: $2, 3, 4, 6, 8, 9$. Hãy nối hai đỉnh với nhau nếu hai số có ƯCLN khác 1. Hỏi đồ thị có đồ thị con $4-$đỉnh đầy đủ? Có chu trình Euler? Chu trình Halmilton?

80. Hãy cho ví dụ về đơn đồ thị 6 đỉnh $3-$đều.

81. Hãy cho đồ thị 4 đỉnh và đẳng cấu với phần bù của nó.

82. Hãy chỉ ra tất cả các đơn đồ thị $3-$đỉnh và không đẳng cấu với nhau từng đôi một.

83. Hãy cho một đồ thị $5-$đỉnh, không có tam giác và cũng không có 3 điểm cô lập.

84. CMR một đồ thị đơn hữu hạn luôn có 2 đỉnh có cùng bậc. (Nếu không cho điều kiện đơn khẳng định sẽ không đúng – tìm ví dụ?)

85. Cho 100 điểm trên mặt phẳng, không có ba điểm nào thẳng hàng. Các điểm được nối với nhau bằng các đoạn màu xanh hoặc đỏ. CMR tìm được 2 đỉnh có số cạnh đỏ xuất phát từ chúng bằng nhau.

86. a) Có tồn tại hay không đồ thị 10 đỉnh và các đỉnh có bậc là 3?

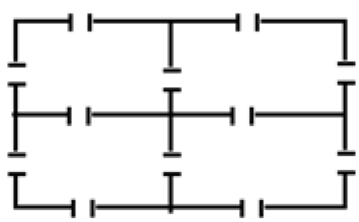
b) Có tồn tại hay không đồ thị 11 đỉnh và các đỉnh có bậc là 3?

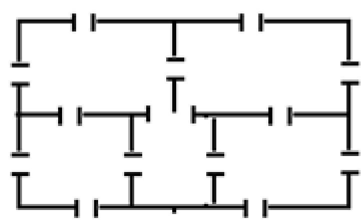
87. Một đồ thị 7−đỉnh 15 cạnh. Bậc của 6 đỉnh lần lượt là $3, 3, 4, 5, 5, 5$. Hỏi cạnh thứ 7 có bậc bằng bao nhiêu?

88. Người ta liệt kê – 5 khả năng – các bậc của một đơn đồ thị 5−đỉnh trong có trường hợp không thỏa mãn. Hãy chỉ ra 1 (hoặc các) khả năng không thể đó?
(A) $1, 1, 1, 1, 0$ (B) $2, 2, 2, 2, 2$ (C) $3, 3, 3, 3, 3$ (D) $2, 2, 3, 3, 4$ (E) $2, 2, 2, 4, 4$

89. Có 5 hành khách trên một xe bus. Họ đều về ga cuối. Lái xe vui vẻ hỏi từng người: Trên xe họ quen biết bao nhiêu hành khách? Các câu trả lời lần lượt là: $1, 2, 3, 6, 5, 3, 1$. Lái xe phát hiện ra ngay có hai người nào đó giận nhau. Tại sao vậy?

90. Hình vẽ dưới đây biểu thị mặt bằng của một căn nhà với các buồng và cửa đi. Liệu có thể đi liên tục qua mỗi cửa một lần và chỉ một lần được không?





7 Bài kiểm tra

91. Hãy vẽ một bản đồ có 5 thành phố, giữa các thành phố là đường đi. Từ mỗi thành phố có $2, 2, 3, 3, 4$ đường. Có bao nhiêu đường trên bản đồ?

92. Trong một đêm dạ hội có 5 chàng trai và 4 cô gái tham gia. Người ta hỏi các cô gái đã khiêu vũ với bao nhiêu chàng trai. Các câu trả lời là $3, 3, 2, 2$. Người ta cũng hỏi các chàng trai đã khiêu vũ với bao nhiêu cô gái. Bốn bạn trả lời: $1, 1, 2, 3$. Hỏi chàng trai thứ 5 đã khiêu vũ với bao nhiêu cô gái?

93. Có bao nhiêu đồ thị đơn có 5 đỉnh và 3 cạnh (các đồ thị đồng cấu không tính là khác nhau)?

94. Một đồ thị là hình lập phương. Hỏi đường dài nhất trong đồ thị này là bao nhiêu?

ĐS: 7.

95. Liệu có thể có không một hội mà trong đó mỗi người có đúng 6 người quen và bất kì hai người nào đều có 2 bạn chung?

96. Xung quanh quả đất có 36 vệ tinh nhân tạo quay xung quanh. Hãy chỉ ra rằng bất kì lúc nào cũng có một vị trí trên trái đất sao cho từ đó chỉ thấy không quá 18 vệ tinh.

97. Một hội có 13 người. Nếu mỗi người đều quen ít nhất x người, thì bất kì 3 người nào đều có một người quen chung. Tìm giá trị x nhỏ nhất để khẳng định là đúng.

ĐS: 9.

98. Người ta xây dựng mạng lưới thông tin trực tuyến cho 10 làng. Mỗi đường dây nối hai làng với nhau. Giữa hai làng không có quá một đường dây. Nếu đã xây dựng xong x đường dây thì có thể trực tiếp hoặc gián tiếp bằng cách nối các đường dây với nhau để có thể liên lạc hai địa danh bất kì. Hỏi ít nhất x là bao nhiêu để chắc chắn khẳng định là đúng ?

ĐS: 37.

99. Một đơn đồ thị 6 đỉnh, bậc của các đỉnh là $1, 1, 1, 2, 3, 4$. Mệnh đề nào sai?

A) Đồ thị liên thông;

B) Đồ thị chứa chu trình;

C) Trong đồ thị có đường độ dài 4;

D) Đồ thị là lưỡng phân;

E) Đỉnh bậc 3 và dỉnh bậc 4 là liền kề.

100. Một đơn đồ thị 6 đỉnh, bậc của các đỉnh là 3 (3-đều). Ít nhất có bao nhiêu tam giác có trong đồ thị?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

101. Trong một nhóm 21 người, mỗi người viết thư cho ba hoặc 4 người khác, ngoại trừ một người viết cho 6 người khác. Liệu có khả năng mỗi người nhận được x hoặc y lá thư?

A) $x = 3$; $y = 2$;

B) $x = 3$; $y = 5$;

C) $x = 4$; $y = 6$;

D) $x = 4$; $y = 3$;

E) $x = 1$; $y = 5$.

102. Trong nhóm 9 người, mọi người ghi lên mảnh giấy có bao nhiêu người quen trong số những người có mặt. Sự quen biết là tương hỗ. Hỏi trên tờ giấy nào có câu trả lời chắc chắn đúng trong 9 số được ghi trên giấy?

A) Trong đó có số 4;

B) Có số chẵn;

C) Có hai số nguyên tố cung nhau;

D) Giữa các số không thể có nhiêu hơn 2 số 8;

E) Trung bình của các số là số nguyên.

103. Trong một nhóm người có một vài người bắt tay nhau. Điều gì chắc chắn đúng?

A) Có 2 người có số bắt tay hơn kem nhau 1;

B) Có người bắt tay số chẵn lần;

C) Số cái bắt tay ít nhất bằng số người của nhóm;

D) Có hai người có số lần bắt tay bằng nhau;

E) Có 3 người bắt tay lẫn nhau.

104. Một tối dạ hội có 6 nam và 5 nữ tham gia. Người ta hỏi các cô gái đã nhảy với bao nhiêu chàng trai. Câu trả lời lần lượt là: $a = 3$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 2$, $e = 4$. Người ta cũng hỏi các chàng trai đã nhảy với bao nhiêu cô gái? Ba người trả lời 2, ba người trả lời 3. Về sau phát hiện ra có một cô gái nói nhầm, hỏi sửa chữa nào sau đây đúng?
A) $a = 5$ B) $e = 3$ C) $c = 4$ D) $b = 2$ E) $d = 5$

105. Các cạnh của một đồ thị đầy đủ 6 đỉnh được sơn bằng ba mầu. Điều nào chắc chắn đúng?

A) Có tam giác một mầu;

B) Có một màu nào đó tạo thành một đồ thị 6−đỉnh liên thông;

C) Từ một mầu nào đó có chu trình;

D) Xóa đi một mầu đồ thị còn lại liên thông;

E) Có 7 cạnh cùng màu.

106. Người ta muốn làm một cái khung của một hình lập phương bằng sợi thép con. Cuối của các dây thép gặp nhau ở các đỉnh và được giữ chặt tại đó. Không được cắt các dây. Hỏi phải cần một bộ dây thép thế nào để thực hiện công việc?

A) 2 đoạn dây độ dài 6;

B) 3 đoạn dây độ dài 4;

C) 1 đoạn dây độ dài 12;

D) Một đoạn độ dài 6 và một đoạn 8;

E) 4 đoạn dây độ dài 3.

107. Nếu một đơn đồ thị có x đỉnh không có chu trình thì trong đồ thị bù của nó chắc chắn tồn tại chu trình. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của x để mệnh đề này đúng.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7.

108. Trong buổi gặp mặt có 11 bạn tham gia. Người ta hỏi từng người có bao nhiêu bạn cùng lớp tham gia? Trong 8 câu trả lời đầu có sáu người nói 2, hai người nói 4. Biết rằng mỗi học sinh đều có ít nhất một người cùng lớp cũng tham dự. Hỏi 3 bạn cuối cùng trả lời thế nào?
A) $4, 2, 2$ B) $3, 3, 3$ C) $4, 4, 4$ D) $4, 4, 2$ E) $2, 2, 2$

8 Tổng hợp kiến thức

Đồ thị: được tạo thành từ các đỉnh và một số cạnh nối một số cặp đỉnh với nhau.

Bậc của đỉnh: là số cạnh xuất phát từ đỉnh đó.

Đồ thị hữu hạn nếu các đỉnh của nó là hữu hạn.

Điểm cô lập: nếu từ nó không có cạnh xuất phát.

Vòng hay Xuyên: là cạnh có đỉnh đầu và cuối trùng nhau.

Đơn đồ thị là đồ thị không có cạnh song song và không chứa cạnh vòng.

Đồ thị đầy đủ là đơn đồ thị mà bất kì hai đỉnh khác nhau đều được nối với nhau bằng một cạnh.

Graph đều (k−đều) nếu bậc của các cạnh đều bằng nhau (và bằng k).

Graph liên thông: nếu từ bất kì điểm này có thể đi đến bất kì điểm khác bằng các cạnh.

Graph con là graph có các đỉnh và các cạnh nhận được từ graph „mẹ”.

Complement graph (Đồ thị bù) là hai đơn đồ thị có chung các đỉnh, các cạnh riêng biệt và hợp của chúng là đồ thị đầy đủ hay nói một cách khác: từ đồ thị đầy đủ xóa đi một số cạnh thì còn lại là đồ thị phần bù.

Chu trình Euler: Là một đường đi khép kín sao cho tất cả các cạnh được đi qua đúng một lần.

Chu trình Hamilton: là một đường đi khép kín sao cho tât cả các đỉnh được đi qua đúng một lần (trừ điểm quay lại).

Isomorph (Đẳng cấu). Hai đồ thị hữu hạn G và G' được gọi là đẳng cấu nếu các đỉnh của chúng được đánh số lần lượt từ 1, 2, 3,...,n sao cho nếu từ hai đỉnh i và j có cạnh nối nhau trong G, thì trong G' hai đỉnh i và j tương ứng cũng được nối với nhau và ngược lại nếu trong G không được nối thì trong G' cũng không.

Các định lý đơn giản và phổ dụng

1. Trong tất cả các graph tổng của các bậc đỉnh là số chẵn.

2. Trong tất cả các graph số các đỉnh có bậc là một số chẵn.

3. Một đồ thị ít nhất hai đỉnh, thì luôn tồn tại hai đỉnh có bậc bằng nhau.

4. Đồ thị đầy đủ n đỉnh có số cạnh bằng $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. Hoặc đồ thị hoặc phần bù của đồ thị là liên thông.

6. Trong đồ thị lưỡng phân không chứa chu trình (vòng tròn) lẻ.

Định lý Euler:

– Một đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi bậc của các đỉnh là số chẵn.

– Một đồ thị liên thông có đường đi Euler khi và chỉ khi có 2 đỉnh có bậc lẻ và các đỉnh khác có bậc là số chẵn.

Định Lý (Dirac). Nếu đơn đồ thị n − đỉnh có bậc của các đỉnh ít nhất bằng $\dfrac{n}{2}$ thì đồ thị có chu trình Hamilton.