Ngô Thị Nhã - Ths. Hoàng Văn Tựu
TS. Nguyễn Văn Lợi (chủ biên)

PHƯƠNG TRÌNH THI LỚP 10

Chương 1

Hàm số bậc hai

1.1 Khảo sát hàm bậc hai

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khảo sát và bình luận.

1.1.1 Giải phương trình $f(x) = 0$

Ta xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Nhân hai vế phương trình với $4a$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0\\
\Leftrightarrow &(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0\\
\Leftrightarrow &(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac
\end{aligned}$$

Công thức nghiệm:
- Trường hợp $b^2 - 4ac < 0$ vô nghiệm.
- Trường hợp $b^2 - 4ac = 0$ có một nghiệm kép $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$.
- Trường hợp $b^2 - 4ac > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

.

1.1.2 Định lý Vi-et

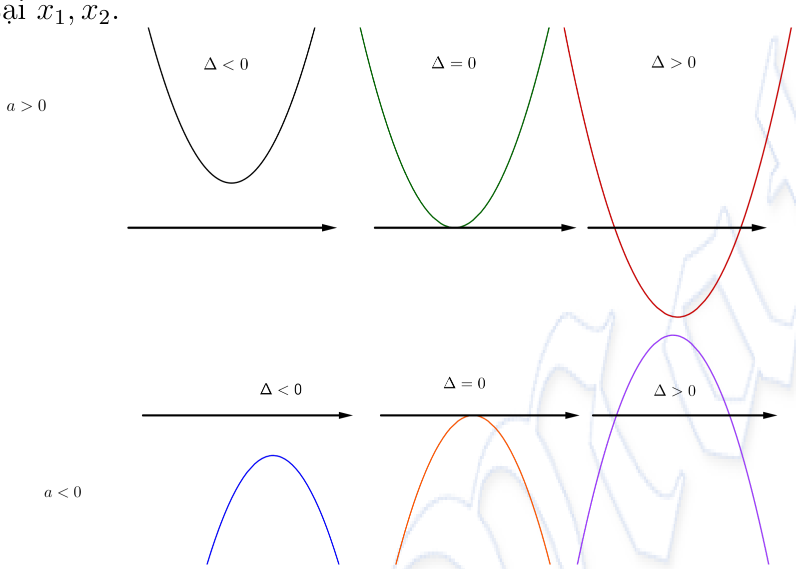
Định lý 1.1.1 *Nếu hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm (không nhất thiết riêng biệt) x_1 và x_2 thì* $\begin{cases} f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

1.1.3 Cực trị

Hàm số có cực trị tại $x = -\dfrac{b}{2a}$. Giá tri cực tri là $\dfrac{-\Delta}{4a} = -\dfrac{(b^2-4ac)}{4a}$. Lấy giá trị min nếu $a > 0$ và max khi $a < 0$.

1.1.4 Đồ thị hàm số

Đồ thị của $y = f(x)$ cắt trục tung ở điểm c. Nếu $\Delta \geq 0$, đồ thị hàm số cắt trục hoành tại x_1, x_2.



1.2 Đa thức bậc hai

1.2.1 Đa thức $x^2 + bx - 7$ có hiệu của 2 nghiệm là $\sqrt[5]{\dfrac{7}{2}}$. Hỏi giá trị của b ?

1.2.2 Xác định các giá trị của k để đa thức $f(x) = x^2 - 7x + 2k$ có nghiệm nào đó gấp 2 lần nghiệm nào đó của đa thức $g(x) = x^2 - 5x - k$?
Đáp số: $k = 0$ hoặc $k = -4$.

1.2.3 Tìm mối liên hệ giữa p và q để đa thức $x^2 + px + q$ có tổng lập phương các nghiệm bằng 1.
Đáp số: Nếu có nghiệm ($p^2 \geq 4q$) thì $-p^3 + 3pq = 1$.

1.2.4 Cho phương trình $x^2 - kx + 6 = 0$ có các nghiệm $x_1,\ x_2$. Biết rằng các số lớn hơn 5 đơn vị so với hai nghiệm $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + kx + 6 = 0$. Hỏi giá trị của k.

1.2.5 Với các giá trị nào của tham số p thì phương trình $x^2 + px + 9 = 0$ có hai nghiệm trong đoạn $[1, 2]$ và nghiệm kia trong đoạn $[3, 4]$?
Chú ý: Ký hiệu $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.
Đáp số: $-6,8 \leq p \leq 6,5$.

1.2.6 Với giá trị nào của tham số p thì phương trình $x^2 + px + 1$ có tất cả các nghiệm giữa khoảng 0 và 5.
Đáp số: $-\frac{26}{5} \le p \le 2$.

1.2.7 Một nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ là a, phương trình $-x^2+px+q=0$ có một nghiệm là b. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = -\frac{x^2}{2} + px + p$ có nghiệm giữa a và b.
Hướng dẫn: $f(a).f(b) \le 0$.

1.2.8 Hãy chỉ ra rằng một đa thức bậc hai có hệ số hữu tỉ có một nghiệm hữu tỉ thì nghiệm còn lại cũng hữu tỉ. Khẳng định có còn đúng nếu các hệ số không hữu tỉ?
Hướng dẫn: Sử dụng định lý Vi-et.

1.2.9 Cho n là số nguyên dương và $a_i,\ b_i,\ c_i,\ i=\overline{1,n}$ là các số thực sao cho với mọi x, $a_ix^2+b_ix+c_i \ge 0$. Chứng minh rằng: $a_1a_2\ldots a_nx^2 + b_1b_2\ldots b_nx + c_1c_2\ldots c_n \ge 0$.

1.2.10 Với giá trị nào của a thì thỏa mãn $\min\{4x^2-4ax+a^2-2a+2|0\le x\le 2\} = 3$.
Đáp số: $a = 1-\sqrt{2}$ hoặc $a = 5+\sqrt{10}$.

1.2.11 Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: x^4+2x^2+8 và x^4-3x^2+3.

1.2.12 Phân tích đa thức thành nhân tử có hệ số thực của đa thức x^4+px^2+q với $p,\ q\in\mathbb{R},\ p^2-4q<0$.

1.2.13 Có thể phân tích các đa thức sau thành nhân tử hay không? Giải thích tại sao?

a. $2x^2-5xy+2y^2$.

b. $3x^2-8xy-3y^2$.

c. $x^2-6xy-7y^2$.

d. $2x^2+8xy+9y^2$.

1.2.14 Chứng minh đa thức $Ax^2+Bxy+Cy^2$ phân tích được thành nhân tử bậc nhất khi và chỉ khi $B^2-4AC\ge 0$.

1.3 Phương trình bậc cao đưa về phương trình bậc 2

1.3.1 Giải phương trình

a. $x^3+4x-1=0$.

b. $x^4+x^3+x^2+x+12=0$.

c. $x^4-6x^3-9x^2+6x+1=0$.

d. $x^4-14x^2+9=0$.

Hướng dẫn.
a. $x^3 + 4x - 1 = (x^2 + 1)^2 - (x - 1)^2$.
b. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3x + 4)$.
c. Chia cả hai vế cho x^2 và đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$.
d. Dạng trùng phương.

1.3.2 Giải phương trình $(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 512$.
Hướng dẫn.
Đặt $y = x - 5$ và đưa về phương trình trùng phương.

1.3.3 Giải phương trình $2x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = 0$.
Hướng dẫn.
$2x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = (x + 1)^3 + (x + 2)^3$.

1.3.4 Giải phương trình

a. $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$.

b. $6x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$.

c. $8x^3 + 13x^2 - 7x - 2 = 0$.

d. $6x^3 + 17x^2 + 26x + 21 = 0$.

Hướng dẫn.
a. Cách 1: Nhẩm nghiệm hữu tỷ. Cách 2: nhân hai vế với 2 rồi đặt $y = 2x$.
b. $6x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = (3x - 1)(x^2 - x - 2)$.
c. $8x^3 + 13x^2 - 7x - 2 = (x + 2)(8x^2 - 3x - 1)$.
d. $(2x + 3)(3x^2 - 4x + 7) = 0$.

1.3.5 Giải phương trình

a. $3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

b. $3x^3 + 3x^2 + 9x + 1 = 0$.

Hướng dẫn.
a. $3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + (x + 1)^3$.
b. $3x^3 + 3x^2 + 9x + 1 = 2(x + 1)^3 + (x - 1)^3$.

1.3.6 Giải phương trình $2x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 3x + 2 = 0$.

1.3.7 Trong đa thức $x^2 + px + q$ có $p,\ q$ là các số lẻ. Hỏi đa thức trên có nghiệm nguyên không? và có nghiệm hữu tỉ hay không?

1.3.8 Đa thức $p(x) = ax^2 + bx + c$ có các hệ số nguyên, $p(0),\ p(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{t}{s}$ là nghiệm hữu tỉ của $p(x)$ với $t,\ s \in \mathbb{Z}$ và $(t, s) = 1$ thì s là số chẵn.
Đáp số: Cả hai trường hợp là "không".

Chương 2

Đồng nhất thức

Trong chương này, chúng tôi nêu bật hai biểu thức quan trọng và các kết quả liên quan.

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
- **Biểu thức Nestbit** $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$.

2.1 Đẳng thức cơ bản

a. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

b. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

c. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

Các trường hợp đặc biệt:

Trường hợp 1 Nếu $a+b+c = 0$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab+bc+ca)$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Trường hợp 2 Nếu $a = b = c$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Trường hợp 3 Nếu có ít nhất hai trong số a, b, c đối nhau thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

2.1.1 Chứng minh: Nếu $a + b + c = 0$, thì

a. $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2) = 2(ab + ac + bc)^2$;

b. $a^5 + b^5 + c^5 = -5(ab + bc + ca)abc$,
$2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$,
$6(a^5 + b^5 + c^5) = 5(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)$,
$2(a^5 + b^5 + c^5)^2 = 25a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4)$;

c. $4(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^2 + b^2 + c^2)^2$
$a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(ab + ac + bc)^2$.

2.1.2 Cho ba số $a,\ b,\ c \neq 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị của biểu thức.

$$P=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right).$$

2.1.3 Cho ba số $a,\ b,\ c$ khác nhau, khác 0 và thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

2.1.4 Cho ba số $a,\ b,\ c$ sao cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^4+b^4+c^4$.

2.1.5 Cho ba số thực $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{ab}{c^2+2ab}+\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}$.
Hướng dẫn: $c^2+2ab=(b-c)(a-c)$. Làm tương tự với các mẫu còn lại.

2.1.6 Cho ba số $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}$.

2.1.7 Cho ba số $a,\ b,\ c\neq 0$ thỏa mãn $a+b+c=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+abc.$$

2.1.8 Chứng minh rằng nếu $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2\\ a+b+c=abc\end{cases}$ thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$.

2.1.9 Cho ba số $a,\ b,\ c$ đôi một phân biệt thỏa mãn $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}=1$.

2.1.10 Cho ba số $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$. Chứng minh rằng luôn có hai số đối nhau.

2.2 Đẳng thức hoán vị, đối xứng

2.2.1 Cho ba số $a,\ b,\ c$ sao cho $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$.
Hướng dẫn: $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$.

2.2.2 Cho $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{x^2+y^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2+z^2-x^2}{z+x}+\frac{x^2+z^2-y^2}{x+y}.$$

Hướng dẫn: Áp dụng **Bài 2.2.1**

2.2.3 Cho ba số $a,\ b,\ c$ khác nhau và khác 0 thỏa mãn $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$

Hướng dẫn: $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}\Rightarrow a+b+c=0$

2.2.4 Cho ba số $a,\ b,\ c>0$ sao cho $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị của biểu thức $M=a\sqrt{\dfrac{(1+b^2)(+c^2)}{1+a^2}}+b\sqrt{\dfrac{(1+c^2)(+a^2)}{1+b^2}}+c\sqrt{\dfrac{(1+a^2)(+b^2)}{1+c^2}}$.

Hướng dẫn: $1+b^2=(b+a)(b+c)$.

2.2.5 Cho hai số $a,\ b$ thỏa mãn $ab=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Hướng dẫn: Quy đồng các tổng trong ngoặc đơn.

2.2.6 Cho ba số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{abc}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}}=a+b.$$

2.3 Các bài toán khác

2.3.1 Cho hai số thực phân biệt $a,\ b$ thỏa mãn $ab=a-b$. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-ab$.

Hướng dẫn: $a^2+b^2=(a-b)^2-2ab$.

2.3.2 Cho $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$. Tính $x+y$.

Hướng dẫn: Nhân thêm biểu thức liên hợp.

2.3.3 Cho ba số $a,\ b,\ c$ khác nhau và thỏa mãn $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2015$. Tính giá trị của biểu thức $A=c^2(a+b)$.

Hướng dẫn: Điều kiện bài tương đương $ab+bc+ca=0$.

2.3.4 Cho hai số $x,\ y$ thỏa mãn $(x+\sqrt{x^2+2})(y+\sqrt{y^2+2})=2$. Tính giá trị của biểu thức $x\sqrt{y^2+2}+y\sqrt{x^2+2}$.

2.3.5 Cho ba số a, b thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}$.
Hướng dẫn: Chứng minh $a = 2b$.

2.3.6 Cho hai số dương a, b và $c \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$.
Hướng dẫn: $ab + bc + ca = 0 \Rightarrow c^2 = (a+c)(b+c)$.

2.3.7 Cho $x^2 - 3x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{(x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 2015)(x^4 + x^2 + 1) + x^4 + 3x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1}.$$

2.3.8 Cho $a > 0$ và $4a^2 + a\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^4 + a + 1 - a^2}} = \sqrt{2}$.

2.3.9 Cho $x = \dfrac{4}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} - 3}$. Tính giá trị của $P = (x^3 - 2x - 1)^{2012}$.

2.3.10 Cho $x = \dfrac{3(2 - \sqrt{5})\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của $P = (x^{50} + x^5 - x^{2014})^{2015}$.
Hướng dẫn: $x = -1$.

2.3.11 Cho $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (4x^5 + 4x^4 - x^3 + 1)^{19} + \left(\sqrt{4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x + 3}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + 2x}}\right)^{2014}.$$

2.3.12 Tính $T = \dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} = \sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99} - \sqrt{100}}$.

2.3.13 Chứng minh $\sqrt{1 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{(a+1)^2}} = \left|1 + \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+1}\right|$. Vận dụng, tính giá trị của biểu thức $S = \sqrt{1 + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2013^2} + \dfrac{1}{2014^2}}$.

Chương 3

Phương trình bậc cao

3.1 Phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)

Phương pháp giải:
* Bước 1: Nhẩm nghiệm x_0 của (1).
* Bước 2: Nếu (1) có nghiệm là x_0 thì phân tích (1) thành $(x - x_0)(ax^2 + mx + n) = 0$.

$$\begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + mx + n = 0 \quad (2) \end{cases}$$

* Bước 3: Giải (2) rồi kết luận nghiệm của phương trình (1).

Chú ý:

a) Đoán nghiệm của (1) dựa vào các kết quả sau:
- Nếu $a + b + c + d = 0$ thì (1) có nghiệm $x_0 = 1$.
- Nếu $a - b + c - d = 0$ thì (1) có nghiệm $x_0 = -1$.
- Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỉ $\dfrac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.

b) Với các phương trình có chứa tham số có thể coi tham số là ẩn để thực hiện việc phân tích đa thức.

c) Ta có định lí Vi-et đối với phương trình bậc ba như sau:
Nếu phương trình bậc ba dạng $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$ có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thì phân tích được thành nhân tử dạng $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ và có công thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

d) Dựa vào các hằng đẳng thức.

3.1.1 Cho phương trình: $x^3 - m(x - 1) - 1 = 0$.

a. Giải phương trình khi $m = 3$.

b. Tìm các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn:
b) Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1-m)=0$. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2+x+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 hay $\Delta > 0$ và $1+1+1-m \neq 0$.

3.2 Phương trình trùng phương: $ax^4+bx^2+c=0 \quad$ (1)

Phương pháp:

Bước 1: Đặt ẩn phụ $y=x^2$ với điều kiện $y \geq 0$.

Bước 2: Biến đổi phương trình (1) về phương trình bậc hai ẩn y: $ay^2+by+c=0$ (2)

Bước 3: Giải (2) để tìm nghiệm y, loại nghiệm y <0.

Bước 4: Giải phương trình $y=x^2$ để tìm $x=\pm\sqrt{y}$.

3.2.1 Giải phương trình:

a. $(x^2+3x+1)(x^2+3x+2)-6=0$

b. $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)=4$.

c. $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$.

Hướng dẫn:

a. Đặt $x^2+3x+1=y \Rightarrow x^2+3x+2=y+1$.

b. $(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)=(12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1)=\cdots$.

c. **Cách 1:** Vì $x=0$ không phải là nghiệm nên chia cả hai vế cho x^4 rồi đặt ẩn phụ $y=\left(\dfrac{x^2-x+1}{x}\right)^2$, ta có phương trình $y^2-6y+5=0$, tìm y rồi tìm x.
Cách 2: Đặt $x^2-x+1=y$, ta có:
$y^4-6x^2y^2+5x^4=0 \Leftrightarrow (y^2-x^2)(y^2-5x^2)=0$.

3.3 Phương trình bậc bốn dạng $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0$

Phương pháp giải
Vì $x=0$ không phải nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, được phương trình dạng $a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+b\left(x\pm\dfrac{1}{x}\right)+c=0 \quad (2)$
Đặt ẩn phụ $x\pm\dfrac{1}{x}=y, (|y|\geq 2) \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2\pm 2$
Ta có phương trình bậc hai ẩn y dạng: $ay^2+by+c\pm 2a=0 \quad (3)$
Giải (3) tìm y rồi tìm x.

3.3.1 Giải phương trình: $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x = 2 = 0$.

Hướng dẫn:

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$.
Đặt $y = x + \frac{1}{x} \Rrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, phương trình trên trở thành: $2y^2 + 3y - 20 = 0$ ....

3.3.2 Giải các phương trình sau:

a. $4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4 = 0$.

b. $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 5x + 2 = 0$.

Hướng dẫn:

a. Chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt $y = x + \frac{1}{x}$.

b. Chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt $y = x - \frac{1}{x}$.

3.4 Phương trình bậc bốn dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e; \frac{a}{e} = \left(\frac{b}{d}\right)^2, (a, b, d, e \neq 0)$

Phương pháp:

Vì x = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia cả hai vế cho x^2 rồi đặt ẩn phụ $y = x + \frac{d}{bx}$ sẽ được phương trình bậc hai ẩn y dạng: $my^2 + ny + p = 0$. Từ đó tìm được y rồi tìm được x.

3.4.1 Giải các phương trình sau:

a $27x^4 - 6x^3 - 37x^2 + 4x + 12 = 0$.

b $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Hướng dẫn:

b. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt ẩn phụ $y = x + 5$.

3.5 Phương trình dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$

Phương pháp:

$\Leftrightarrow [(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] = m \Leftrightarrow [x^2 + (a + d)x + ad][x^2 + (b + c)x + bc] = m$
Sau đó đặt ẩn phụ thích hợp. Chẳng hạn: Đặt $y = x^2 + (a + d)x + ad$ được phương trình bậc hai ẩn y dạng: $y^2 + my + n = 0(*)$. Giải phương tình (*) rồi tìm y rồi tìm x.

3.5.1 Giải các phương trình sau:

a. $(x^2+3x-4)(x^2+x-6)=24.$

b. $(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)=72.$

Đáp số:
a. $S=\{0;-2;-1\pm 2\sqrt{3}\}$;
b. $S=\{1;8\}$.

3.6 Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$, trong đó $ad=bc$

Phương pháp:
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2 \Leftrightarrow [(x+a)(x+d)][(x+b)(x+c)]=mx$
$\Leftrightarrow [x^2+(a+d)x+ad].[x^2+(b+c)x+bc]=mx^2$
Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $x^2\neq 0$, ta có:
$$\left[\frac{x^2+(a+d)x+ad}{x}\right].\left[\frac{x^2+(b+c)x+bc}{x}\right]=m$$
$$\Leftrightarrow \left[x+\frac{ad}{x}+(a+d)\right]\left[x+\frac{bc}{x}+(b+c)\right]=m$$
- Đặt ẩn phụ $y=x+\frac{ad}{x}$ hoặc $y=x+\frac{ad}{x}+(a+d)$ được phương trình bậc hai ẩn y.
- Giải phương trình bậc hai ẩn y rồi tìm x.
Hoặc: Sau khi biến đổi phương trình thành: $[x^2+(a+d)x+ad].[x^2+(b+c)x+bc]=mx^2$, đặt ẩn phụ $x^2+(a+d)x+ad=y$ rồi giải phương trình bậc hai ẩn y với x là tham số (hoặc ẩn x với y là tham số). Tìm được $y=kx$ rồi giải phương trình $x^2+(a+d)x+ad=y=kx$ để tìm ẩn x.

3.6.1 Giải các phương trình sau:

a. $(x-8)(x-4)(x-2)(x-1)=4x^2.$

b. $(x^2-3x+3)(x^2-2x+3)=2x^2.$

Đáp số:
a. $S=\{5\pm\sqrt{17}\}$;
b. $S=\{1;3\}$.

3.7 Phương trình bậc bốn : $x^4+ax^3+bx+c=0$, trong đó $a^3+8b=0$.

Phương pháp:
- Thêm bớt kx^2 để $x^4+ax^3+kx^2=(x^2+hx)^2$ rồi tìm mối liên hệ giữa (x^2+hx) với $-kx^2+bx$ để đưa phương trình ban đầu về dạng: $(x^2+hx)^2+k(x^2+hx)+c=0$.

- Đặt ẩn phụ $y = (x^2 + hx)$ được phương trình bậc hai ẩn y.
- Giải phương trình bậc hai ẩn y. Tìm được y rồi tìm x.

3.7.1 Giải các phương trình sau:

a. $x^4 - 2x^3 + x = 2$.

b. $x^4 + 8x^3 - 64x + 15 = 0$.

3.8 Phương trình bậc bốn dạng $(ax+b)^2(cx+d)(ex+f) = g$.

Phương pháp:
- Thông thường $(ax+b)^2$ thường biến đổi được về dạng $(ax+b)^2 = k(cx+d)(ex+f)+h$.
- Đặt ẩn phụ $y = (cx+d)(ex+f)$ được phương trình bậc hai ẩn y.
- Tìm được y rồi tìm được x.
** Hoặc (cách khác)*
- Triển khai hằng đẳng thức: $(ax+b)^2 = f(x) = a^2x^2 + 2abx + b^2$.
- Triển khai $(cx+d)(ex+f) = g(x) = cex^2 + (cf+de)x + df$.
- Tìm mối liên hệ giữa f(x) và g(x) rồi đặt ẩn phụ để giải.
** Hoặc (cách khác):*
- Đặt $ax + b = y$.
- Tìm mối liên hệ giữa $cx + d$ và $ex + f$ với y (biểu diễn $cx + d$ và $ex + f$ theo y) được phương trình trùng phương ẩn y. Tìm y rồi tìm x.
** Hoặc (cách khác):*
- Nhân cả ai vế của phương trình với $\frac{a}{c}.\frac{a}{e}$ để biến đổi phương trình về dạng:
$(a^2x^2 + 2abx + b^2)(a^2x^2 + 2abx + k) = g\frac{a^2}{ce}$.
- Đặt ẩn phụ $y = a^2b^2 + 2abx + b^2$ đưa phương trình về dạng: $y(y+h) - g\frac{a^2}{ce} = 0$.

3.8.1 Giải các phương trình sau:

a. $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1) = 3$.

b. $(x+1)^2(2x+1)(2x+3) = 18$.

Đáp số:
a. $S = \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right\}$;
b. $S = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$

3.9 Phương trình bậc bốn dạng: $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

Phương pháp:
- Sử dụng hằng đẳng thức:
$(A\pm B)^4 = A^4 \pm 4A^3B + 6A^2B^2 \pm 4AB^3 + B^4$ hoặc $A^4+B^4=(A^2+B^2)^2-A^2B^2$
(Nếu sử dụng trực tiếp hằng đẳng thức thì rất khó khăn khi A, B là các số lớn.)
Cách giải phương trình $(y-1)^4+(y+1)^4=2y^4+12y^2+2$.
- Đặt ẩn phụ $y = x+\dfrac{a+b}{2}$ ta có phương trình:
$2y^4+3(a-b)^2y^2+\dfrac{1}{8}(a-b)^4-c=0$.
- Đặt ẩn phụ $t=y^2, (t\le 0)$.
- Giải phương trình ẩn t tìm t sau đó tìm y rồi tìm x.

3.9.1 Giải các phương trình sau:

a. $(x-6)^4+(x-8)^4=16$.

b. $(x+6)^4+(x+4)^4=82$.

Đáp số:
a. $S=\{6;8\}$.
b. $S=\{-3;-7\}$.

3.10 Phương trình $\dfrac{ax}{mx^2+nx+p}+\dfrac{bx}{mx^2+qx+p}=c$ (1)

- Tìm điềm kiện của x để biểu thức xác định (mẫu số khác 0).
- Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu số cho $x\neq 0$ ở mỗi phân thức ở vế trái, ta được phương trình:
$\dfrac{a}{mx+n+\dfrac{p}{x}}+\dfrac{b}{mx+q+\dfrac{p}{x}}=c$ - Đặt ẩn phụ $y=mx+n+\dfrac{p}{x}$, ta có: $mx+q+\dfrac{p}{x}=y+k$
được phương trình mới ẩn y:
$\dfrac{a}{y}+\dfrac{b}{y+k}=c \Leftrightarrow cy^2+(ck-a-b)y-ak=0 \quad (2)$
- Giải phương trình (2) tìm được y rồi tìm được x.

3.10.1 Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}-\dfrac{2x}{3x^2-x+2}=-1$.

b. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

Đáp số:

a. $S=\left\{\dfrac{-11\pm\sqrt{97}}{6}\right\}$

b. $S=\left\{2;\dfrac{3}{4}\right\}$.

3.11 Phương trình : $\dfrac{ax^2+mx+b}{ax^2+nx+b}+\dfrac{ax^2+px+b}{ax^2+qx+b}=0$

Phương pháp:
- Tìm điều kiện của x để biểu thức xác định (mẫu số khác 0).
- Vì $x-0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu số cho $x\neq 0$ ở mỗi phân thức ở vế trái, ta được phương trình:

$$\frac{ax+m+\dfrac{b}{x}}{ax+n+\dfrac{b}{x}}+\frac{ax+p+\dfrac{b}{x}}{ax+q+\dfrac{b}{x}}=0$$

- Đặt ẩn phụ $y=ax+\dfrac{b}{x}$ ta được phương trình mới ẩn y.
- Giải phương trình ẩn y tìm được y rồi tìm được x.

3.11.1 Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{5x^2+6x+9}{5x^2-4x+9}+\dfrac{5x^2-8x+9}{5x62-17x+9}=0.$

b. $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5}+\dfrac{x2-5x+5}{x62-6x+5}=-\dfrac{1}{4}.$

Hướng dẫn:

a. Chia cả tử và mẫu số cho $x\neq 0$. Đặt ẩn phụ $y=5x+\dfrac{9}{x}$.

b. Chia cả tử và mẫu số cho $x\neq 0$. Đặt ẩn phụ $y=x+\dfrac{5}{x}$

3.12 Phương trình : $(ax)^2+\dfrac{(bx)^2}{(ax+c)^2}=d$, trong đó $b=c^2$

Phựpưng pháp:
- Thêm cùng một biểu thức vào hai vế để tạo thành bình phương đúng.
- Đặt ẩn phụ.

3.12.1 Giải các phương trình sau:

a. $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11.$

b. $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40.$

Đáp số:

a. $S=\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$

b. $S=\left\{1\pm\sqrt{19}\right\}.$

3.13 Phương trình bậc 5 $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$

Phương pháp:
Phương trình này có tổng các hệ số của các số hạng bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các số hạng bậc lẻ) luôn có nghiệm $x=-1$ nên có thể phân tích thành $(x+1)(mx^4+nx^3+px^2+nx+m)=0$
Ngoài nghiệm $x=-1$, giải phương trình đối xứng bậc chẵn để tìm các nghiệm còn lại.

3.13.1 Giải các phương trình sau:

a. $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$.

b. $x^5-5x^4+4x^3+4x^2-5x+1=0$.

Đáp số:
a. $S=\left\{\pm 1; \dfrac{3\pm\sqrt{52}}{2}\right\}$
b. $S=\{\pm 1; 2\pm\sqrt{3}\}$.

Chương 4

Phương trình chứa căn

4.1 Biến đổi tương đương đưa về dạng cơ bản

4.2 Kiến thức cơ bản

a. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

b. $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ C \geq 0 \\ (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C \end{cases}$

c. $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C} \Rightarrow (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^3 = C.$

4.3 Phương pháp biến đổi tương đương

4.3.1 Giải phương trình $2x + \sqrt{x + \sqrt{x - \frac{1}{4}}} = 2.$

4.3.2 Giải phương trình $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$

4.3.3 Giải phương trình $\sqrt{x(3x + 1)} - \sqrt{x(x - 1)} = 2\sqrt{x^2}.$

4.4 Phân tích thành tích

4.4.1 Phân tích thành tích bằng cách nhóm hạng tử

4.4.1 Giải phương trình $2\sqrt{2 + x - x^2} = 1 + \frac{1}{x}.$

4.4.2 Giải phương trình $(\sqrt{x + 2})^3 = 3x + 2.$

4.4.3 Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}=2\sqrt{x-x^2}$.

4.4.2 Phân tích thành tích bằng cách sử dụng hằng đẳng thức

4.4.4 Giải phương trình $\sqrt[3]{x-5}+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x+2}=-2$.

4.4.5 Giải phương trình $3x-1+\dfrac{x-1}{4x}=\sqrt{3x+1}$.

4.4.6 Giải phương trình $\sqrt{x-2000}+\sqrt{y-2001}+\sqrt{z-2002}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)-3000$.

4.4.3 Phân tích thành tích bằng cách nhân biểu thức liên hợp

4.4.7 Giải phương trình $\sqrt{2028-x}+\sqrt{2093-x}+\sqrt{2268-x}=29$.

4.4.8 Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

4.4.9 Giải phương trình $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$.

4.5 Phương pháp đặt ẩn phụ

4.5.1 Kiến thức cơ bản

1. $a.f(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0 \Rightarrow \begin{cases} t=\sqrt{f(x)}, t\geq 0 \\ at^2+bt+c=0 \end{cases}$

2. $a\sqrt{f(x)}\pm b\sqrt{g(x)}+c\sqrt{f(x).g(x)}=d.h(x)=0 \Rightarrow t=a\sqrt{f(x)}\pm b\sqrt{g(x)}$.

3. $\left[\begin{array}{l} a\sqrt{A^2}+b\sqrt{AB}+c\sqrt{B^2}=0 \\ aA+bB=c\sqrt{AB} \\ aA+bB=c\sqrt{mA^2+nB^2} \end{array}\right. \Rightarrow$ đặt $u,\ v$ đưa về $x.u^2+y.uv+z.v^2=0$.

4. Đặt $a=f(x),\ b=g(x)$ đưa về hệ hai ẩn $a,\ b$.

4.5.2 Đặt một ẩn

4.5.1 Giải phương trình $\sqrt{8+\sqrt{x+3}}+\sqrt{5-\sqrt{x-3}}=5$.

4.5.2 Giải phương trình $9x^2-(3x+2)\sqrt{3x-1}+2=3x$.

4.5.3 Giải phương trình $(x-1)(x+2)+4(x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=12$.

4.5.3 Phân tích thành tích bằng cách sử dụng tính chất đẳng cấp

4.5.4 Giải phương trình $x+\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{x-x^3}$.

4.5.5 Giải phương trình $\sqrt{4x^2-15x+20}=4x-10+7\sqrt{x-1}$.

4.5.6 Giải phương trình $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$.

4.5.4 Đặt ẩn đưa về hệ phương trình

4.5.7 Giải phương trình $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=x$.

4.5.8 Giải phương trình $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{9-x^2}=2$.

4.5.9 Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$.

4.6 Phương pháp đánh giá

4.6.1 Giải phương trình $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=2$.

4.6.2 Giải phương trình $\sqrt{13-3x}+\sqrt{3x-11}=3x^2-24x+50$.

4.6.3 Giải phương trình $(3x+5)\sqrt{78y-39}+(3y+5)\sqrt{78x-39}=2(3x+5)(3y+5)$.

Chương 5

Hệ phương trình

5.1 Kiến thức cơ bản

Định nghĩa 5.1.1 Phương trình có dạng $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ được gọi là phương trình đẳng cấp bậc 2.

Phương pháp giải.

TH1: $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ. *TH1:* x, y không đồng thời bằng 0. Không giảm tổng quát, ta giả sử $y \neq 0$. Khi đó, chia cả hai vế của phương trình với y^2 .

Phương trình đã cho tương đương $a\left(\dfrac{x}{y}\right) + b\dfrac{x}{y} + c = 0$.

Đây là phương trình bậc hai ẩn $t = \dfrac{x}{y}$ đã biết cách giải.

Định nghĩa 5.1.2 Cho hệ phương trình $\begin{cases} f(x.y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

Ta nói rằng cặp $(x_0, y_)$ là một nghiệm của hệ nói trên nếu $\begin{cases} f(x_0,y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$

Nhận xét: Trong chương trình sách giáo khoa hiện hành, chúng ta không có phương pháp giải một phương trình hai hay nhiều ẩn. Do đó, một cách tự nhiên ta nghĩ rằng để giải một hệ phương trình, ta dùng phép biến đổi đại số để biến đổi hệ phương trình thành hệ phương trình , trong đó có một phương trình một ẩn. Nói cách khác, ta tìm cách khử đi một ẩn. Đây là tư tưởng căn bản nhất để ta có thể xử lý được các bài toán về hệ phương trình nói chung.

5.2 Giải hệ phương trình

Phần này, chúng ta làm quen với phương pháp thế biến. Đầu tiên, ta bắt đầu với hệ hết sức cơ bản như sau:

Hệ cơ bản 5.2.1 $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ f(x,y) = 0 & (2) \end{cases}$

Phương pháp: Từ (1) ta rút x hoặc y và thế vào (2).

5.3 Phương pháp thế một biến

5.3.1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = 11 & (2) \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ 3y^2 - 8y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{5}{3} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases} \end{array} \right.$$

5.3.2 Giải hệ phương trình

5.3.3 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x - xy - 2y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x^2 + x - xy - 2y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)(x + y + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} & (1) \\ \\ \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} & (2) \end{array} \right.$$

Như vậy, hệ đã cho được đưa về hai hệ (1) và (2). Giải hệ (1) và (2) bằng cách áp dụng **Hệ cơ bản 5.2.1** nói ở trên.

5.3.4 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (1) $\Leftrightarrow (2x - y - 1)(x + y - 2) = 0$.

Chú ý: Nếu ta coi phương trình (1) như một phương trình bậc hai ẩn x với tham số y và phương trình này có Δ là bình phương của biểu thức chứa y thì việc phân tích (1) trở nên rất nhanh chóng.

5.3.5 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (1) $\Leftrightarrow (3x - 1)(2x - y + 1) = 0$.

5.3.6 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4x - 2y - 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

5.3.7 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 1 = 2xy + 2x \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$

5.3.8 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3xy + 5 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (1) là phương trình đẳng cấp bậc 2.

5.3.9 Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0$.

5.3.10 Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x + y)(2y - x + 1) = 0$.

5.4 Phương pháp thế cụm biểu thức

5.4.1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (2) $\Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$.

5.4.2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y + 1)(x + y + 1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình (2) $\Leftrightarrow y + 1 = \dfrac{x^1 - 1}{x}$ thế vào (1).

5.4.3 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$

Hướng dẫn: $4x + y = (4x + y)(x^3 + y^3 - xy^2)$.

5.4.4 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$

Hướng dẫn: $x + 3y = (x + 3y)(x^2 + y^2 + xy)$.

5.5 Phương pháp cộng

5.5.1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12 \\ x^2 + y^2 + x - 5y = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Trừ hai vế, đưa về **Hệ cơ bản 5.2.1**.

5.5.2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 3 \quad (1) \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Nhân hai vế của (1), đưa về **Hệ cơ bản 5.2.1**.

5.5.3 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 6y = 6x \\ y^2 + 9 = 2xy \end{cases}$

Hướng dẫn: Cộng hai vế của hai phương với nhau.

5.5.4 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2y^2x = 24 \\ y^3 + 2x^2y = 24 \end{cases}$

Hướng dẫn: Trừ hai vế của hai phương với nhau.

5.5.5 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x + y)(1 + xy) = 4 \end{cases}$

Hướng dẫn: Trừ hai vế của hai phương với nhau.

5.5.6 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$

Hướng dẫn: Trừ hai vế của hai phương với nhau.

5.5.7 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases}$

Hướng dẫn: Cộng hai vế của hai phương với nhau.

5.6 Phương pháp đặt ẩn phụ

5.6.1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x+y=4 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+y,\ b=xy$.

5.6.2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x+y=4 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+y,\ b=xy$.

5.6.3 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ (x-y)(x^2-y^2)=3 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+y,\ b=x-y$.

5.6.4 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x^2+y^2,\ b=xy$.

5.6.5 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2+2y+1}+\dfrac{y^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{2} \\ 3xy-x-y=1 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=\dfrac{x}{y+1},\ b=\dfrac{y}{x+1}$.

5.6.6 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(y+1)=8 \\ x(x+1)+y(y+1)=17-xy \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+y,\ b=xy$.

5.6.7 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3 \\ x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+\dfrac{1}{y},\ b=\dfrac{x}{y}$.

5.6.8 Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+1=7y \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+\dfrac{1}{y},\ b=\dfrac{x}{y}$.

5.6.9 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=x^2+y,\ b=xy.$

5.6.10 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0 \\ (2x+y)+\dfrac{1}{2x-y}=3 \end{cases}$

Hướng dẫn: Đặt $a=2x+y,\ b=2x-y.$

5.7 Hệ phương trình ba ẩn

5.7.1 Phương pháp thế biến

Dấu hiệu: Có ít nhất hai biến bậc 1.

5.7.1 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=8 \\ x+3y+9z=26 \end{cases}$

5.7.2 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ x+yz-zx=3 \end{cases}$

5.7.3 $\begin{cases} x+y=z^2 \\ x=2(y+z) \\ xy=2(z+1) \end{cases}$

5.7.4 $\begin{cases} xz=x+4 \\ 2y^2=7xz-3x-14 \\ x^2+z^2=35-y^2 \end{cases}$

5.7.5 $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ xy=z^2 \\ xyz=216 \end{cases}$

5.7.6 $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ xz=z^2 \end{cases}$

5.7.7 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x(y+z)2=21 \\ y(z+x)=8 \end{cases}$

5.7.8 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \\ xyz=8 \end{cases}$

5.7.9 $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ xz=z^2 \end{cases}$

5.7.10 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{3}{z}=-2 \\ \\ \dfrac{4}{xy}-\dfrac{3}{z^2}-\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}$

5.7.2 Phương pháp cộng

5.7.11 $\begin{cases} x+y=8 \\ y+z=9 \\ z+x=5 \end{cases}$

5.7.12 $\begin{cases} xy=2 \\ yz=6 \\ zx=3 \end{cases}$

5.7.13 $\begin{cases} x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2 \end{cases}$

5.7.14 $\begin{cases} x^2+y^2+xy=37 \\ y^2+z^2+xz=28 \\ y^2+z^2+yz=19 \end{cases}$

5.7.15 $\begin{cases} x-y^2-yz=0 \\ x-y-y^2-z^2=0 \\ x+y-y^3-z=0 \end{cases}$

5.7.16 $\begin{cases} x-2y^2-yz-z=0 \\ 2x-4y-4y^2-z^2=0 \\ x+2y-2y^3-z=0 \end{cases}$

5.7.17 $\begin{cases} xy+x-y=7 \\ yz-y+z=13 \\ zx-x-z=7 \end{cases}$

5.7.18 $\begin{cases} x + xy + y = 17 \\ y + yz + z = 23 \\ z + zx + x = 11 \end{cases}$

5.7.19 $\begin{cases} (\sqrt{x} - 13)(\sqrt{y} - 14) = 2 \\ (\sqrt{y} - 14)(\sqrt{z} - 15) = 6 \\ (\sqrt{z} - 15)(\sqrt{x} - 13) = 3 \end{cases}$

5.7.20 $\begin{cases} 3x^2 + 2y + 1 = 2z(x + 2) \\ 3y^2 + 2z + 1 = 2x(y + 2) \\ 3z^2 + 2x + 1 = 2y(z + 2) \end{cases}$

HD: Cộng ba phương trình với nhau.

5.7.3 Đặt ẩn phụ

5.7.21 $\begin{cases} x - y = 3xy \\ yz + xz - 2xy = \dfrac{1}{8} \\ xyz = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

5.7.22 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 8 \end{cases}$

5.7.23 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x + y) = 0 \\ y^2 + z^2 - 2(y + z) = 0 \\ z^2 + x^2 - 2(z + x) = 0 \end{cases}$

5.7.24 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 8 \end{cases}$

5.7.25 $\begin{cases} 5xy = 6(x + y) \\ 7yz = 12(y + z) \\ 3zx = 4(x + z) \end{cases}$

5.7.26 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 8 \end{cases}$

5.7.27 $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ xz = z^2 \end{cases}$

5.7.28 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \\ xyz=8 \end{cases}$

5.7.29 $\begin{cases} \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{24}{5} \\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{24}{7} \\ \dfrac{xyz}{x+y}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

5.7.4 Đánh giá

5.7.30 $\begin{cases} xyz+x=2z \\ xyz+y=2x \\ xyz+z=2y \end{cases}$

5.7.31 $\begin{cases} 4x-y^2=1 \\ 4y-z^2=1 \\ 4z-x^2=1 \end{cases}$

5.7.32 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$

5.7.33 $\begin{cases} 4x^3=2y^2+y+1 \\ 4y^3=2z^2+z+1 \\ 4z^3=2x^2+x+1 \end{cases}$

5.7.34 $\begin{cases} x=\dfrac{2y^2}{1+y^2} \\ y=\dfrac{2z^2}{1+z^2} \\ z=\dfrac{2x^2}{1+x^2} \end{cases}$

5.7.35 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$

HD: BĐT $x^4+y^4+z^4 \geq (x+y+z)(xy+yz+zx)$

Chương 6

Cấu trúc đề thi vào 10-Môn Toán

6.1 Biểu thức đại số (1,5-2 điểm)

- Rút gọn biểu thức.
- Tính toán giá trị biểu thức hoặc tìm điều kiện của biến thỏa mãn điều kiện.

6.2 Phương trình, hệ phương trình (2 điểm)

- Phương trình bậc hai.
- Phương trình quy về phương trình bậc hai.
- Hệ phương trình.
- Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.

6.3 Hàm số và đồ thị (2 điểm)

- Đường thẳng $y = ax + b$.
- Parabol $y = ax^2 + bx + c$.
- Hệ thức Vi-et và ứng dụng (nghiệm phương trình).

6.4 Hình học (3-3,5 điểm)

- Tứ giác nội tiếp.
- Hệ thức trong tam giác.
- Đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau.
- Số đo góc.

- Ba điểm thẳng hàng.
- Diện tích.
- Quan hệ giữa các đường (song song, vuông góc,. . .).
- Đường thẳng và đường tròn biến thiên đi qua điểm cố định.
- Cực trị hình học.

6.5 Dành cho học sinh giỏi (0,5- 1 điểm)

- Bất đẳng thức.
- Cực trị.
- Phương trình, hệ phương trình không mẫu mực.
- Phương trình nghiệm nguyên, ...